Introducción a las Estructuras Algebraicas
Tarea 3

Prof. Mauricio Medina

Instrucciones: Los ejercicios marcados con un $*$ se entregan en LaTeX a más tardar **el dia 8 de Mayo de 2020**.

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética existen numeros primos $p_1, p_2, ..., p_n$ tales que:

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n} \text{ y}$$

$$b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}.$$

Demuestre que:

(a) $mcd(a, b) = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$ donde $s_i = \text{mín}\{r_i, t_i\}$.

(b) $mcd[a, b] = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \cdots p_n^{\ell_n}$ donde $\ell_i = \text{máx}\{r_i, t_i\}$

2. Sea D un dominio entero. Demuestre que:

(a) Si $x \in D$ es unidad y $xy = 1$ para algún $y \in D$, entonces y es unidad.

(b) Si $x, y \in D$ son unidades, entonces xy es unidad.

(c) Si $x, y \in D$ son tales que $xy = 1$, entonces x y y son unidades.

*3. Sean R y S dos anillos conmutativos con uno. Demuestra que

$$R \times S = \{(r, s) \mid r \in R \; s \in S\}$$

es un anillo conmutativo con uno con las operaciones:

$$(r, s) + (t, u) = (r + t, s + u) \text{ y } (r, s)(t, u) = (rt, su).$$

¿Si R y S son campos, entonces $R \times S$ es campo?

4. Sea R un anillo conmutativo con uno e $I \subseteq R$ un ideal. Demuestre que R/I es un anillo conmutativo con uno con las operaciones:

$$(a + I)\overline{+}(b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I) \cdot (b + I) = (ab) + I.$$

5. Sea $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos con uno. Demuestre que si φ es biyectiva con inversa $\varphi^{-1} : S \to R$ entonces φ^{-1} también es un morfismo de anillos con uno. En este caso decimos que φ es un isomorfismo entre R y S. Por otro decimos que *R y S son isomorfos, denotado $R \cong S$ si existe un ismorfismo entre ellos.*

6. Sea
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} q & a \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q}\ a \in \mathbb{R} \right\}$$
   (a) Demuestre que R es un anillo conmutativo con uno con las operaciones de matrices.
   (b) Demuestre que
   $$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
   es un ideal de R.
   (c) Demuestre que $\varphi : R/I \to \mathbb{Q}$ definida como
   $$\varphi\left(\begin{pmatrix} q & a \\ 0 & q \end{pmatrix} + I \right) = q$$
   es un morphismo de anillos bien definido y que es un isomorfismo. (*Hint:* Vea que cada elemento de R/I pude ser representado como $\left(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)$ para algún $q \in \mathbb{Q}$).

*7. Sean I y J ideales de un anillo conmutativo con uno R.
   (a) Demuestre que $I + J := \{a + b \mid a \in I \text{ and } b \in J\}$ es un ideal de R.
   (b) Demuestre que $I + J$ es el menor ideal de R que contiene a I y a J.
   (c) Demuestre que la intersección $I \cap J$ es un ideal de R.
   (d) Demuestre que $IJ := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I\ b_i \in J\}$ es un ideal de R contenido en $I \cap J$.

*8. Sean $n\mathbb{Z}$ y $m\mathbb{Z}$ dos ideales de $\mathbb{Z}$. Demuestre que:
   (a) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = mcd(n, m)\mathbb{Z}$.
   (b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = mcm[n, m]\mathbb{Z}$.

9. Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ elememntos de un anillo conmutativo con uno R. Demuestre que
$$\langle x_1, ..., x_n \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R \right\}$$
es un ideal de R y es el menor ideal que contiene a los elementos $x_1, ..., x_n$. Al ideal $\langle x_1, ..., x_n \rangle$ se llama el *ideal generado por los $x_1, ..., x_n$*. (*Hint:* Usa inducción sobre n)

*10. Use el pequeño Teorema de Fermat para encontrar la solución de las siguientes ecuaciónes:

   (a) $[x]^{39} - [8] = [0]$ en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

   (b) $[x]^{86} - [6] = [0]$ en $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$.

11. Sea $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos. Denotemos $K = \operatorname{Ker} \varphi$. Demuestre que $\bar{\varphi} : R/K \to S$ definida como $\bar{\varphi}(r + K) = \varphi(r)$ está bien definida y que es un morfismo de anillos inyectivo.

*12. Sea K un campo. Definimos la siguiente función

$$\varphi : \mathbb{Z} \to K$$

como:

$$\varphi(n) = \begin{cases} 1 + \cdots + 1 \text{ (n veces) si } n > 0 \\ 0 \text{ si } n = 0 \\ (-1) + (-1) + \cdots + (-1) \text{ (n veces) si } n < 0 \end{cases}$$

Demuestre que:

   (a) φ es un morfismo de anillos.

   (b) Si $\operatorname{Ker} \varphi \neq 0$ entonces $\operatorname{Ker} \varphi = p\mathbb{Z}$ para algún primo p. (*Hint:* Recuerda como son todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y recuerda que $a|b$ si y solo si $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$.)

   (c) Si $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ entonces K contiene una copia de $\mathbb{Q}$. (*Hint:* Usa la propiedad universal del anillo de fracciones)