El problema de la ecuación general de quinto grado

Def: Un grupo G es soluble si existen subgrupos normales $G_0, G_1, \dots, G_n$ tales que $e = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$ y G_{i+1}/G_i es abeliano para $0 \leq i < n$.

En particular todo grupo abeliano es soluble.

Un grupo no abeliano que es soluble es S_3 ya que se tiene la cadena $e \subseteq A_3 \subseteq S_3$.

Por otro lado, el grupo S_5 no es soluble.
A_5 es el unico subgrupo normal no trivial de S_5. Ademas A_5 es simple.

$$\boxed{e \subseteq A_5 \subseteq S_5} \qquad S_5/A_5 \cong C \quad |C|=2$$

Para $n \geq 5$, los unicos subgrupos normales de S_n son e, S_n y A_n.

Def: Una extension $F \subseteq E$ es una extension radical si $E = F[\alpha]$ donde α es una raiz de un polinomio de la forma $x^n - a$ con $a \in F$. En otras palabras $F[\alpha]$ es radical si existe $n \geq 1$ tal que $\alpha^n \in F$

repeated radical extension

Def: Una extensión $F \subseteq E$ es una extension radical repetida si existen campos F_i con $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_r = E$ tal que F_i es una extensión radical de F_{i-1} para $1 \leq i \leq r$.

Def: Un polinomio $f \in F[x]$ es soluble por radicales sobre F si f se escinde en un campo E que es una extensión radical repetida de F.

Teorema (Galois). Sea $f \in F[x]$ con $car(F)=0$. Entonces f es soluble por radicales sobre F si y solo si $Gal(E/F)$ es un grupo soluble, donde E es un campo de descomposicion de f sobre F.

Lema. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible y de grado primo p. Supongamos que f tiene $p-2$ raices reales y dos raices complejas no reales. Entonces $Gal(E/F) \cong S_p$ donde E es un campo de descomposicion de f sobre $\mathbb{Q}$.

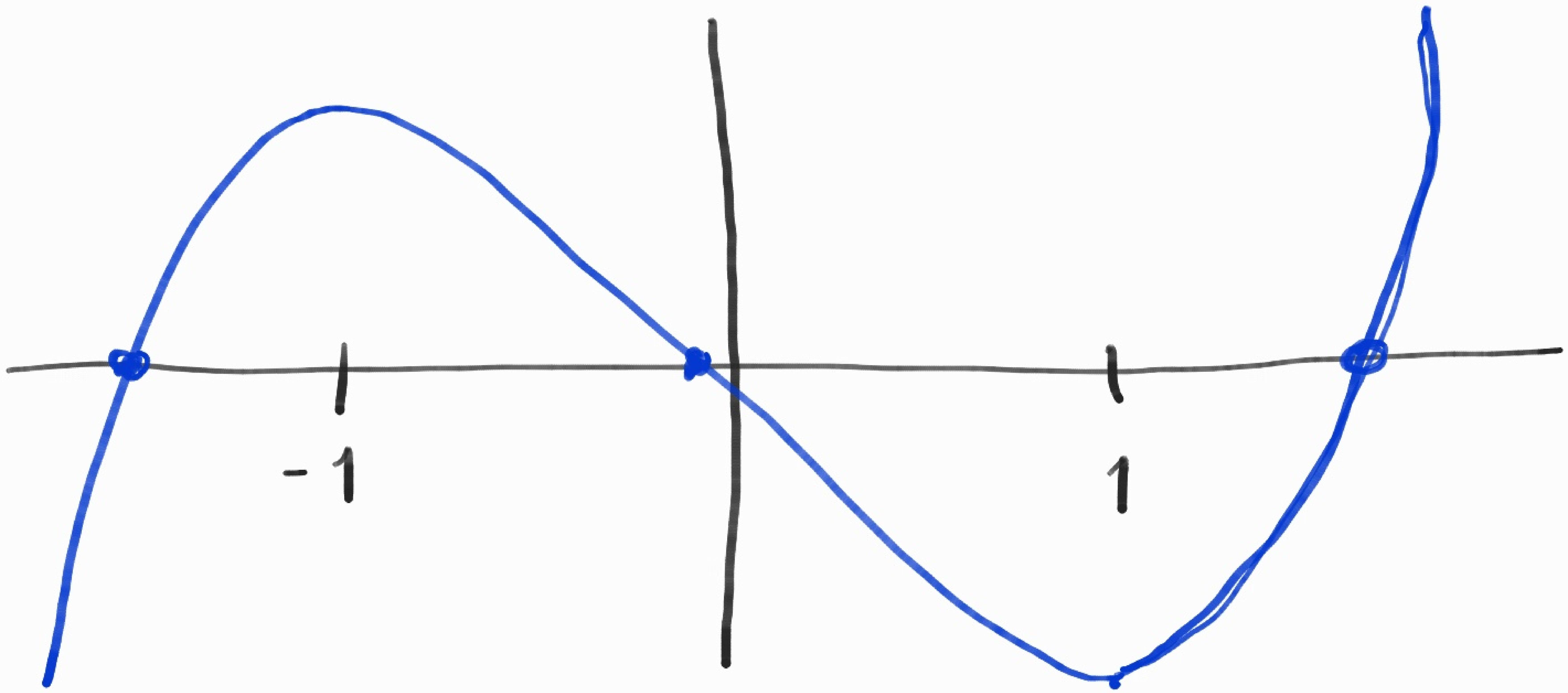
Dem

$G \hookrightarrow Sym(\Omega) \cong S_p$ $\quad \Omega = \{\text{raices de } f \text{ en } E\}$

$\uparrow$ siempre hay un p-ciclo $(1, \ldots, p)$ y una trasposicion $(1,2)$

Considere el polinomio $f(x) = 2x^5 - 10x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$

Este polinomio es irreducible por el criterio de Einsenstein. Tenemos que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 10x^4 - 10 = 10(x^4 - 1)$



El polinomio $f(x)$ cumple las hipótesis del lema anterior. Por lo tanto, si E es su campo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$, $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_5$ que <u>no</u> es un grupo soluble. Por el Teorema de Galois, el polinomio $\underline{2x^5 - 10x + 5}$ no es soluble por radicales.

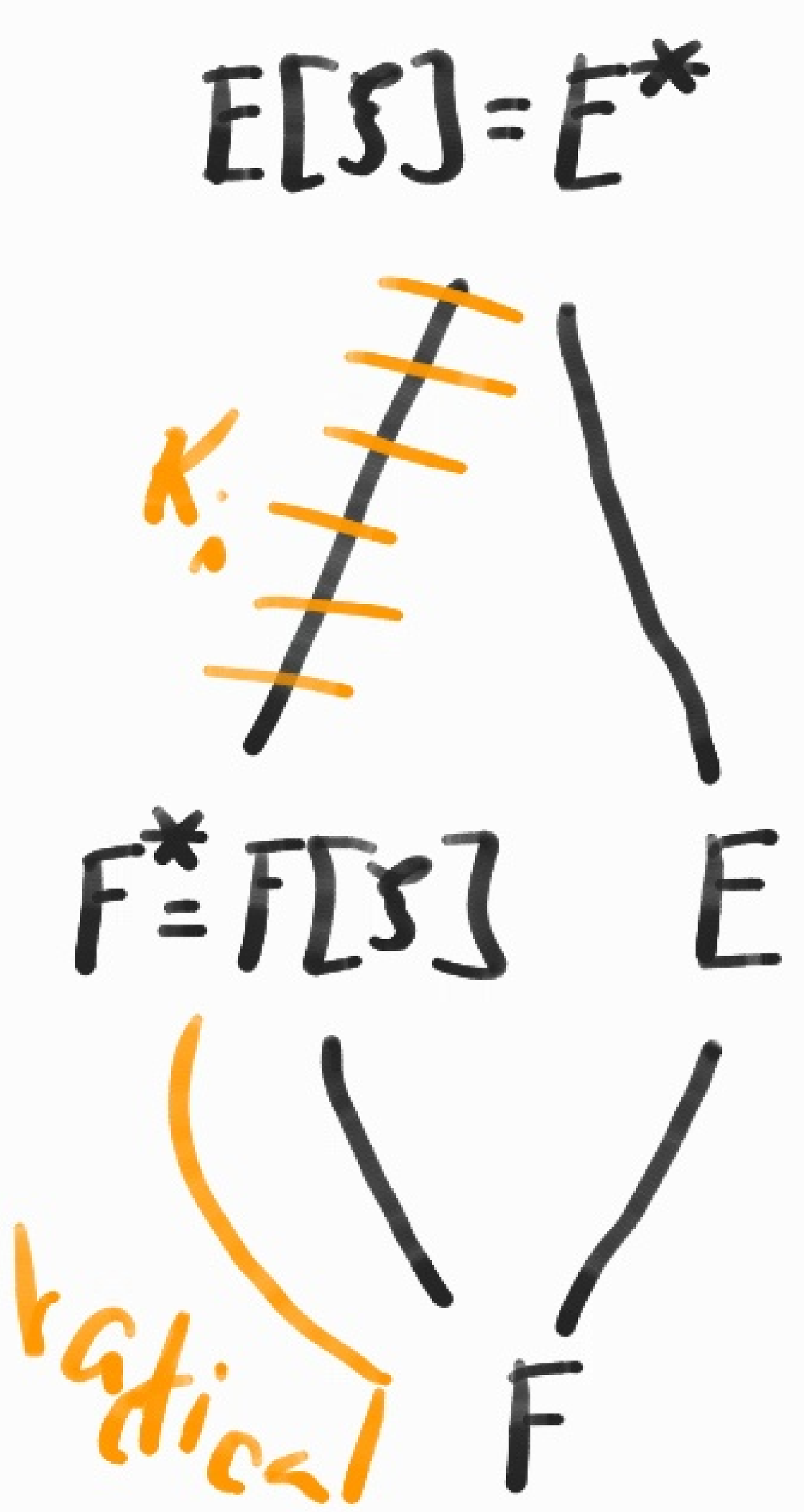
No puede existir una formula general

que resuelva cualquier polinomio de grado $n \geqslant 5$

Un resumen de la prueba del teorema de Galois:

Prueba:

Sea E un campo de descomposicion de f sobre F y supongamos que $Gal(E/F)$ es soluble. Pongamos $n=[E:F]$. Podemos encontrar una extension $E^* \supseteq E$ que contenga una raiz n-esima de la unidad ξ, $E^*=E[\xi]$. Sea $F^*=F[\xi]$.



Tenemos $\langle F^*, E\rangle = E^*$. Entonces La extension $E^* \supseteq F^*$ es de Galois y $Gal(E^*/F^*)$ es isomorfo a un subgrupo de $Gal(E/F)$, entonces es soluble. Sea $G=Gal(E^*/F^*)$ y

$e=G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_r = G$ con G_i/G_{i-1} simple de orden primo p_i con $1 \leq i \leq r$. Pongamos $K_i = \mathrm{Fix}(G_i)$. Por el TFG tenemos una torre de campos $F^* = K_r \subseteq \cdots \subseteq K_1 \subseteq K_0 = E^*$ con $K_i \supseteq K_{i-1}$ de Galois con grupo de Galois de orden primo p_i. Cada p_i divide $|G|$ que divide a $n = |Gal(E/F)|$

Se puede ver que cada extension $K_i \subseteq K_{i-1}$ es radical (Teorema de Kummer) para $1 \leq i \leq r$. Como la extension $F \subseteq F^* = F[\xi]$ tambien es radical, E^* es una extension radical repetida de F en la que f se escinde. Por lo tanto f es soluble por radicales.

Reciprocamente, supongamos que $f \in F[X]$ es soluble por radicales sobre F y sea L una extension radical repetida de F en la que f se escinde. Sea E el campo de descomposicion de f sobre F en L.

Tenemos que $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_r = L$ con $F_i = F_{i-1}[\alpha_i]$ y $\alpha_i^{n_i} \in F_{i-1}$ con $1 \leq i \leq r$.

Sea n un multiplo comun de los n_i's y adjuntemos ξ_n a L, $L^* = L[\xi]$.

Definimos los campos $K_{-1} = F$, $K_0 = F[\xi_n]$ y $K_i = K_{i-1}[\alpha_i]$. Ent $K_r = [\xi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r] = L^*$

Así $F = K_{-1} \subseteq K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_r = L^*$ y tenemos $F \subseteq E \subseteq L^*$.

Ahora hay que probar que $K_i \supseteq K_{i-1}$ es de Galois con grupo de Galois abeliano.

Por inducción sobre r. Para $r=0$, tenemos $K_{-1} \subseteq K_0$ i.e., $F \subseteq F[\xi_n]$. Esta extensión es de Galois y tiene grupo de Galois abeliano.

Sup. que $i>0$. Tenemos que $K_i = K_{i-1}[\alpha_i]$ donde $\alpha_i^{n_i} \in F_{i-1} \subseteq K_{i-1}$. Como K_{i-1} contiene una raíz n-ésima de la unidad y como n_i divide a n, el resultado de Kummer nos dice que $K_{i-1} \subseteq K_i$ es de Galois con grupo de Galois cíclico.

Teorema: (Kummer) Sea $F \subseteq E$ campos y supongamos que F contiene una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Son equivalentes:

(a) E es de Galois sobre F y $Gal(E/F)$ es cíclico de orden un divisor de n.

(b) $E = F[\alpha]$ para un $\alpha \in E$ con $\alpha^n \in F$.

Lema: Sea $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_t = L$ donde las extensiones $F_{i-1} \subseteq F_i$ son de Galois con grupo de Galois abeliano. Supongamos que $F \subseteq E \subseteq L$ con $F \subseteq E$ de Galois. Ent $Gal(E/F)$ es soluble.