entonces $K \subseteq E$. Así que $F \subseteq E$ satisface la condición (iii) del lema anterior y entonces E es una cerradura algebraica de F.

Si $E_0 \supseteq F$ es otra cerradura alg. de F, ent $E_0 \supseteq F$ es algebraica. Por lo tanto $E_0 \subseteq E$.

Cor. Sea E un campo con la propiedad de que cada polinomio $f \in E[x]$ con $gr(f) \geq 1$ tiene al menos una raiz en E. Entonces E es algebraicamente cerrado.

Dem:

Sea $f \in E[x]$ con $gr(f) \geq 1$. Como no es constante, entonces f tiene un factor irreducible, digamos $g(x)$, con $gr(g) \geq 1$

Afirmamos que $gr(g) = 1$. Por hipotesis g tiene una raiz en E, digamos α.

Esto implica que $(x-\alpha) \mid g(x)$, pero la irreducibilidad de g implinca $gr(g)=1$ de hecho $g(x) = a(x-\alpha)$ $a \in E$.

$$\therefore f(x) = b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

$b, \alpha_i \in E$ $n \geq 1$ $\therefore$ E es alg. cerrado.

Por el Teorema Fundamental del Algebra sabemos que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& \mathbb{A} \arrow[dl, dash] \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}$ es la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}=\mathbb{R}[i] \arrow[d, dash] \\
\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

¿Cuál es la cerradura alg. de $\mathbb{R}$?

Es $\mathbb{C}$..

$[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$ y $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Existensia de cerraduras algebraicas.

Siempre existen las cerraduras algebraicas?

Una primera idea es considerar $F[x]$ y enlistar a sus elementos y así para cada uno ir contruyendo un campo de descomposicion. Por ejemplo sup. $\{\dots, f, g, \dots\} = F[x]$ y que hemos contruido una extension algebraica $F \subseteq E$ tal que todos los polinomios hasta f son separable sobre E. Usando un corolario anterior podemos construir un campo de descomposicion L para g que contenga a E. Entonces

Tomar el siguiente polinomio

Todo polinomio hasta g se escinde sobre L.
Continuamos de esta manera hasta agotar la lista.

Aquí se necesecita un uso cuidadoso del axioma de elección

Otra manera de atacar la pregunta viene del hecho de que una cerradura algebraica de F es una extension algebraica máxima. ¿Por qué no usar el lemma de Zorn en las extensiones algebraicas del campo F?

Al usar el lema de Zorn directamente uno podria pensar que se puede usar el lema de Zorn para encontrar una extensión de campos maxima. Pero esta no es posible porque dada cualquier extension $F \subseteq E \subsetneq E(x)$. Si tomamos una cadena de extensiones de F, su union es una extension de F.

Lema: Sea $F \subseteq E$ una extension algebraica. Entonces la cardinalidad $|E|$ de E no puede exeder la cardinalidad de $F[x]$.

Dem:

Sea S el conjunto de todos los pares ordenados (f, α) con $0 \neq f \in F[x]$ y $\alpha \in E$ tal que $f(\alpha) = 0$. Como para cada polinomio $f(x)$, el numero de α tal que (f, α) esta en S es finito, ent $|S| \leq |F[x]| \aleph_0 = |F[x]|$. Por otro lado tenemos una funcion inyectiva de E en S, dada por $\alpha \longmapsto (\min_F(\alpha), \alpha)$. Por lo tanto $|E| \leq |S| \leq |F[x]|$.

Teorema: Sea F cualquier campo. Entonces F tiene una cerradura algebraica.

Dem:

Fijemos un conjunto S de cardinalidad estrictamente mayor que $F[x]$.

Tomemos una funcion inyectiva arbitraria de F en S e identifiquemos a F con su imagen en S, así $F \subseteq S$.

Consideramos las parejas $(E, \mathcal{S})$ con $E \subseteq S$ y $\mathcal{S}$ una estructura que haga de E un campo. En particular, consideramos $(F, \mathcal{F})$ con su estructura de campo.

Escribimos $(E_1, \mathcal{S}_1) \leq (E_2, \mathcal{S}_2)$ si $E_1 \subseteq E_2$ y la restricción de la estructura $\mathcal{S}_2$ a E_1 es la estructura $\mathcal{S}_1$.

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las parejas $(E, \mathcal{S})$ tales que $(F, \mathcal{F}) \leq (E, \mathcal{S})$ y la extension es algebraica. El conjunto $\mathcal{P}$ no es vacío porque $(F, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}$. Ademas $\mathcal{P}$ es un copo.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{P}$ y tomemos $B = \bigcup E$ donde (E, δ) corre en los elementos de $\mathcal{C}$. Para dotar a B de estructura de campo, tomemos $x, y \in B$, Entonces existe $(E, \delta) \in \mathcal{C}$ tal que $x, y \in E$, entonces la suma $x+y$ y el producto xy en B los tomamos en E. Esto da una estructura de campo a B.

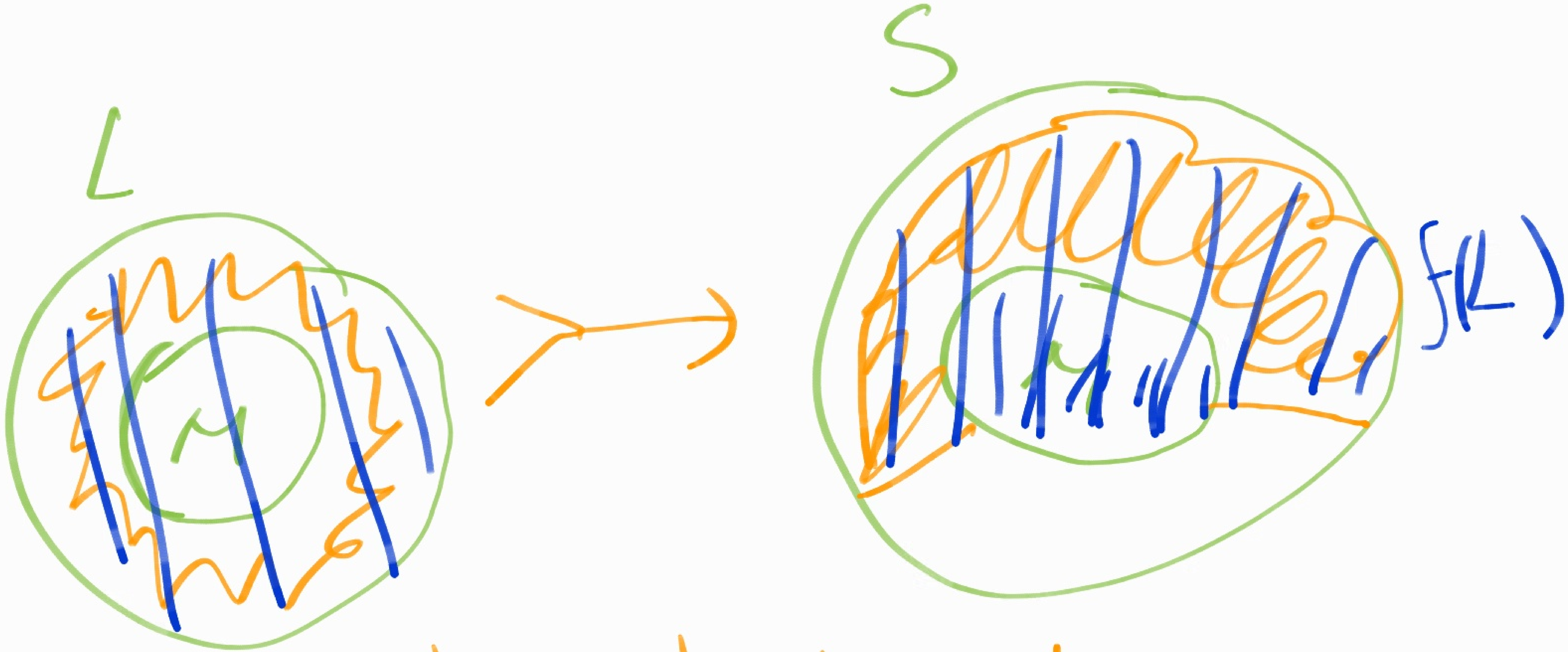
Se puede ver que $(F, \mathcal{F}) \leq (B, \mathcal{B})$ es algebraica. Por lo tanto $(B, \mathcal{B}) \in \mathcal{P}$

Por el lema de Zorn $\mathcal{P}$ tiene maximos.

Sea $(M, \mathcal{M})$ un maximo en $\mathcal{P}$. Afirmamos que $(M, \mathcal{M})$ es una cerradura algebraica de F.

Supongamos que existe una extension algebraica $M \subsetneq L$ de M. Por el lema anterior $|L| < |F[x]| < |S|$, esto implica

que $|L-M| < |S-M|$. Así que existe una función inyectiva de $L-M$ en $S-M$.
Identificamos $L-M$ con su imagen en $S-M$ y trasladamos al complemento la estructura de campo de L. Entonces Tenemos (en S) una extensión algebraica $(M,\mathcal{M}) \leq (L,\mathcal{L})$ contradiciendo la maximalidad de M. $\therefore (M,\mathcal{M})$ es una cerradura algebraica del campo F.



$$|L-M| < |S-M|$$

$$L \overset{f}{\rightarrowtail} S \qquad a, b \in f(L) \qquad \begin{aligned} a &= f(a') \\ b &= f(b') \end{aligned}$$

$$a+b = f(a'+b')$$

$$ab = f(a'b')$$