Veamos otro ejemplo. Sea K un campo y consideremos el anillo de polinomios con coeficientes en K, denotado $K[x]$. Entonces los elementos de $K[x]$ son expresiones de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \overset{n \geq 0}{a_i \in K}$$

Si $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ entonces,

$$f(x) + g(x) = \sum c_i x^i \qquad c_i = a_i + b_i \quad i \geq 0$$

$$f(x) g(x) = \sum d_i x^i \qquad d_\ell = \sum_{i+j=\ell} a_i b_j$$

$$0(x) = 0 \qquad 1(x) = 1$$

K un campo

$$K[x] = \left\{ (a_i) \,/\, \begin{matrix} a_i \in K \\ i \geq 0 \end{matrix} \text{ y casi todos los } a_i\text{'s son cero} \right\}$$

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$$

$$\underline{(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)}$$

$$\updownarrow$$

$$\underline{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$$

$$(a_i)(b_i) = \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)$$

$gr(a_i)$ = es el mayor indice n tal que $a_n \neq 0$.

Si $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in K[x]$, se define su grado como

$$gr(f(x)) = n \quad \text{si } a_n \neq 0$$

Al término $a_n x^n$ se le llama el término de grado del polinomio y a_n se conoce como el coeficiente de grado de $f(x)$. Así los polinomios constantes no cero $f(x) = a_0 \neq 0$ tienen grado $gr(a_0) = 0$. Al polinomio 0 le asignamos el símbolo $-\infty$ que satis-ace que

$$-\infty < n \quad \forall n \geq 0, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad -\infty + n = -\infty$$

$$-\infty n = -\infty \quad \forall n \neq 0.$$

Lema: Si $f(x)$, $g(x)$ son polinomios en $K[x]$, entonces

1) $gr(f(x)g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x))$.

2) $gr(f(x) + g(x)) \leq \text{máx}\{gr(f(x)), gr(g(x))\}$.

Cor. El anillo $K[x]$ es un dominio entero.

Dem: Sean $f(x), g(x) \in K[x]$ distintos de cero. Entonces $gr(f(x)) \geq 0$ y $gr(g(x)) \geq 0$. Por el lema anterior

$$gr(f(x)g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x)) \geq 0$$

$$\therefore f(x)g(x) \neq 0.$$

Para ver que $K[x]$ es un anillo euclidiano, definimos la norma como:

Dado $0 \neq f(x) \in K[x]$, definimos

$$N(f) = gr(f(x)) \geq 0.$$

(i) $gr(f(x)g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x)) \geq gr(f(x))$

Para el algoritmo de la división, tenemos la division de polinomios.

Prop. Sean $f(x), g(x) \in K[x]$ con $g(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios unicos $q(x)$ y $r(x)$ en $K[x]$ tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ ó $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

https://www.medina-barcenas.com/estructuras/anillos-de-polinomios

https://www.medina-barcenas.com/estructuras/en-este-video-vemos-que-hay
-algoritmo-de-la-division-para-kx-con-k-un-campo

Nota: Todo campo K es dominio euclidiano, definiendo $N: K-\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}\cup\{0\}$ $N(a)=c\in\mathbb{N}$.

Recordemos que dado un anillo R y $a\in R$, el ideal generado por a, es $\underline{Ra}=\{ra \mid r\in R\}$. Un ideal de esta forma se le llama <u>principal</u>.

Def. Un dominio entero D se dice que es un dominio de ideales principales (DIP), si todo ideal I de D es de la forma $I=Dx$ para algún $x\in D$.

Prop. Todo dominio euclidiano es un DIP.

Dem:

Sea A un dominio euclidiano e I un ideal de A. Si $I=0$, ent $I=A0$ i.e, I es principal. Sup $I\neq 0$. Consideremos el conjunto $\{N(a) \mid 0 \neq a \in I\} \subseteq \mathbb{N}$. Este conjunto no es vacio porque $I \neq 0$. Por el Principio de Buen Orden, existe $0 \neq a \in I$ tal que $N(a) \leq N(b)$ $\forall 0 \neq b \in I$. Afirmamos que $I = Aa$. Siempre se tiene $Aa \subseteq I$. Sea $b \in I$ y dividimos entre a, es decir, $b = aq + r$ con $r = 0$ ó $N(r) < N(a)$. Tenemos que $r = b - aq \in I$, ent no puede pasar que $N(r) < N(a)$. Por lo tanto $r = 0$ y así, $b = aq$. $\therefore I \subseteq Aa$.

Así, tenemos que los anillos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ y $K[x]$ son DIP.

El contraejemplo al recíproco de la proposición anterior es el anillo

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]. \qquad \omega = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$$

$$= \{a+b\omega \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

Def: Un anillo R es Noetheriano si dada una cadena ascendente de ideales de R $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ existe $n>0$ tal que $I_n = I_{n+i}$ $\forall i>0$.

Prop. Sea D un DIP. Entonces D es Noetheriano.

Dem:

Sea $Da_1 \subseteq Da_2 \subseteq Da_3 \subseteq \cdots$ Tomamos $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} Da_i$

I es un ideal de D. Como D es DIP existe $a \in D$ y. $I = Da$. En particular, $a \in \bigcup Da_i$ ent existe $k > 0$ tal que $a \in Da_k$. Por lo tanto

$$I = Da \subseteq Da_k \subseteq Da_{k+1} \subseteq \cdots \subseteq I$$

$\therefore$ D es Noeth.