Ahora queremos usar la teoria de campos para tratar problemas clásicos de contrucciones con regla y compas. En especifico: la cuadratura del circulo, la duplicacion de un cubo y la triseccion de un ángulo. También queremos saber cuales n-agonos son construibles.

Supongamos que nuestro plano de construccion es $\mathbb{C}$ (el plano complejo) y que los puntos 0 y 1 han sido marcados.

Def: Sean $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto dado de al menos dos puntos.

1) Un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ es construible en un paso a partir de $\mathcal{P}$ si es la interseccion de dos rectas distintas, o de dos circulos o de una recta y un circulo, construidos a partir de $\mathcal{P}$ con operaciones elementales.

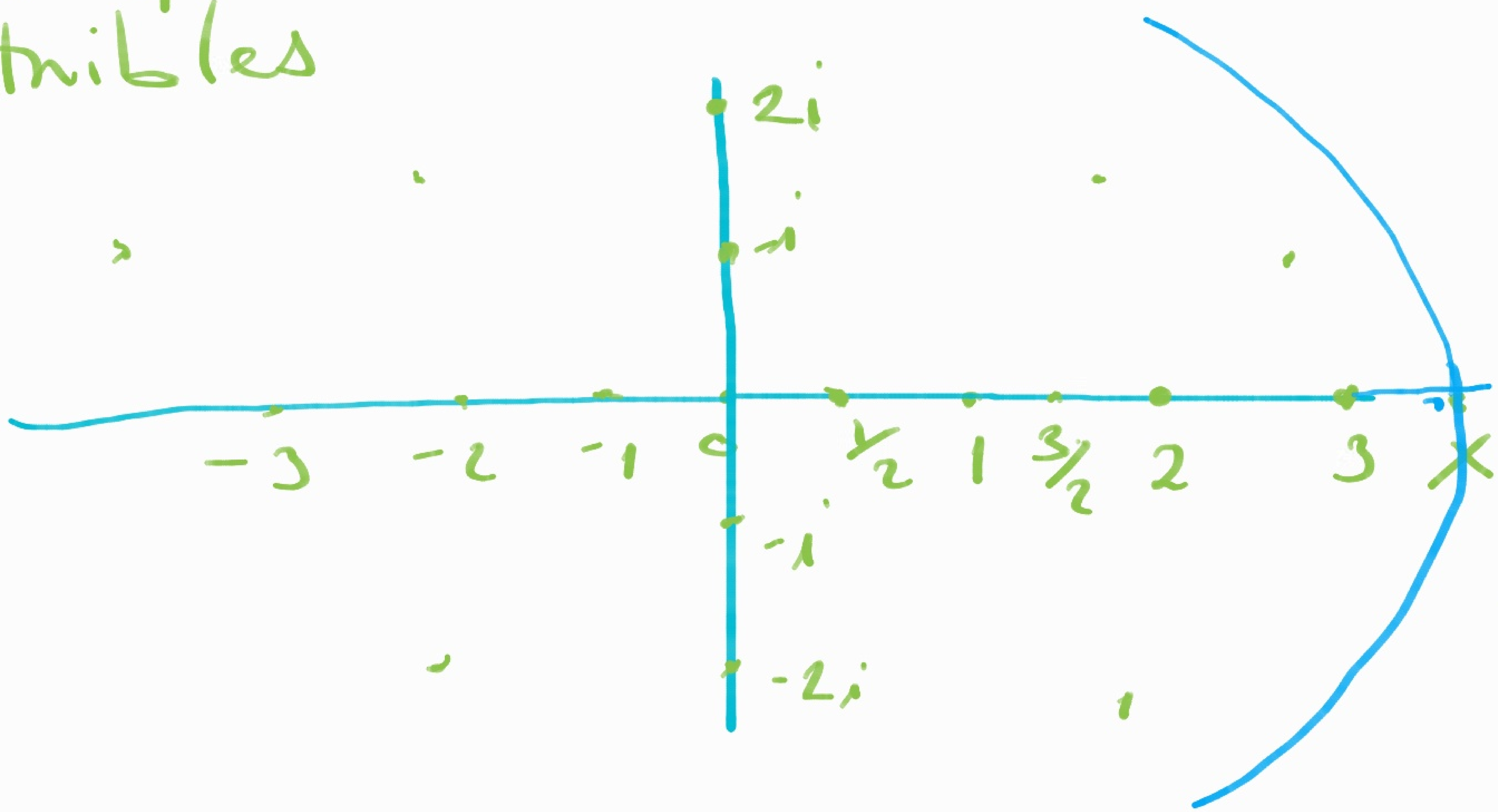
2) Un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ es construible a partir de $\mathcal{P}$ si existe una sucesion finita de

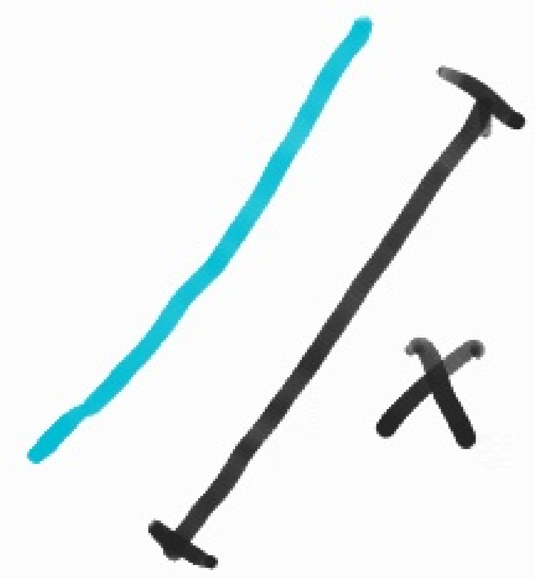
puntos en $\mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ tales que:

(i) α_1 es construible en un paso a partir de $\mathcal{P}$

(ii) α_i es construible en un paso a partir de $\mathcal{P} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ para $2 \leq i \leq n$.

Es claro que todos los elementos de $\mathbb{Z}$ son construibles

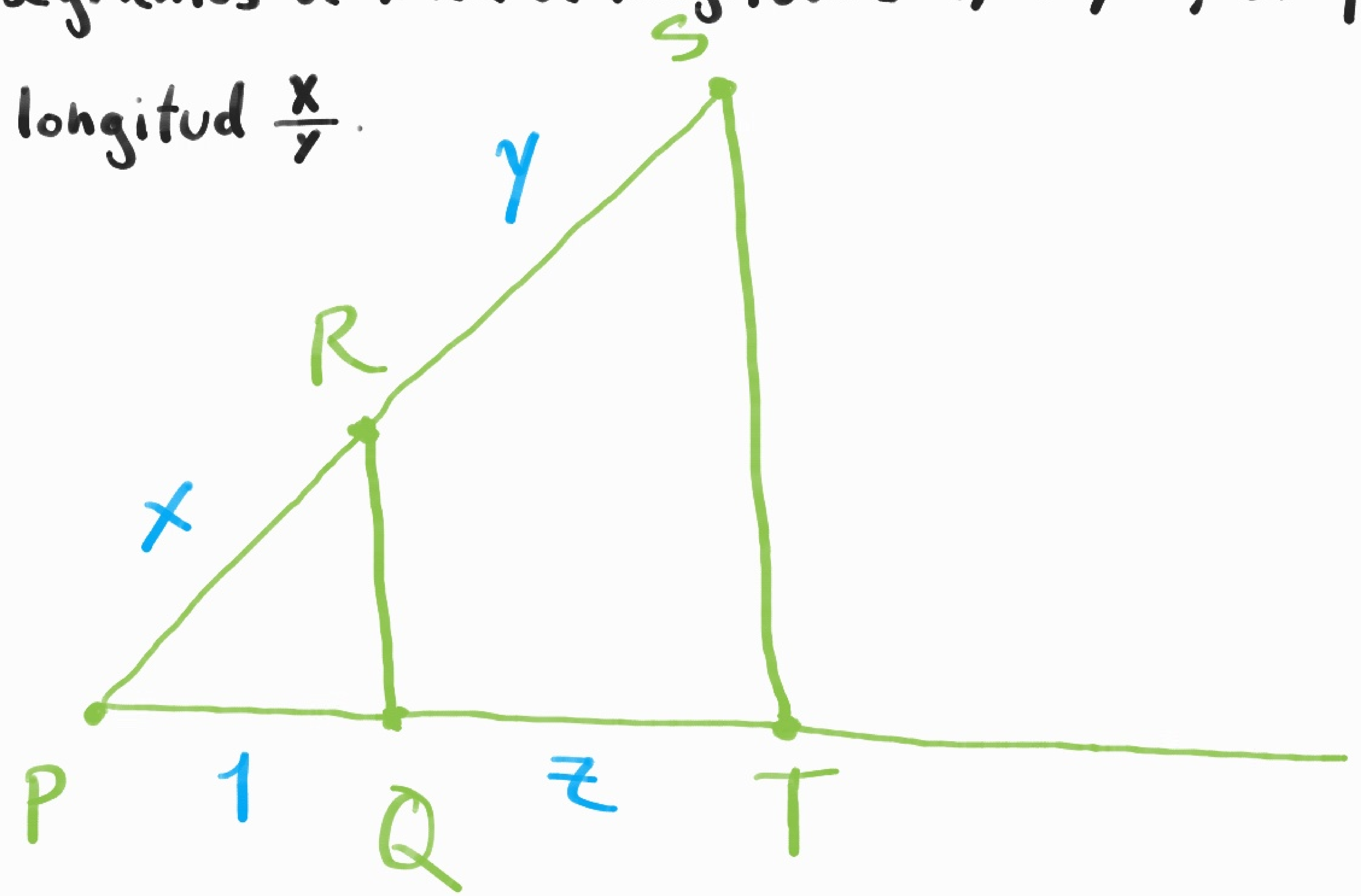




Entonces el real x es construible

Lema. Dados segmentos de línea de longitudes 1, x y y, es posible construir un segmento de longitud $\frac{x}{y}$.

Dem:

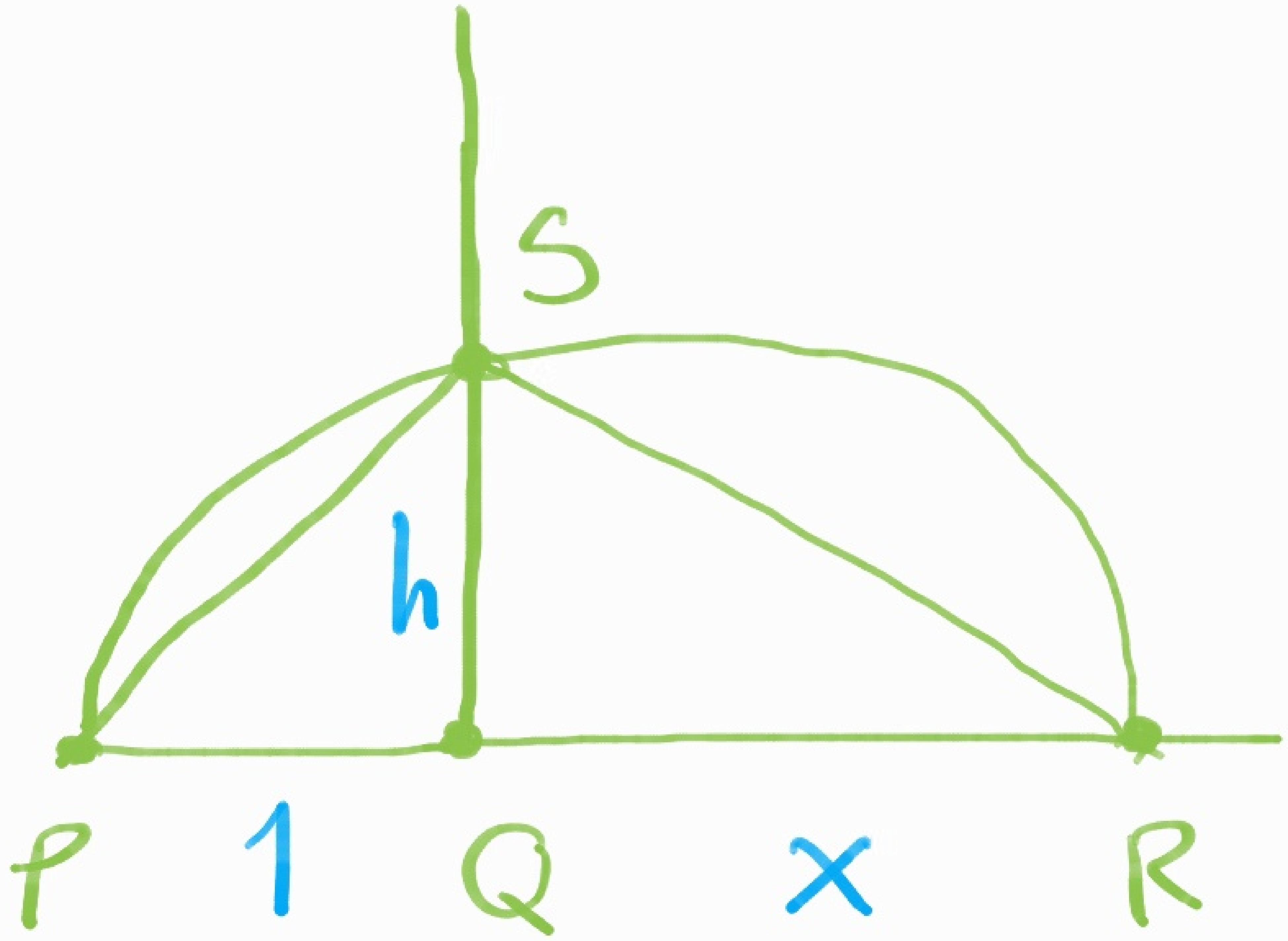


Δ PQR Δ PTS son semejantes

$$\frac{x+y}{x} = \frac{1+z}{1} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x} = 1 + z \Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

Lema: Dados segmentos de longitud 1 y x, es posible construir un segmento de longitud $\sqrt{x}$.

Dem:



ΔSPQ

ΔSRQ

son semejantes

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{1} = h$$

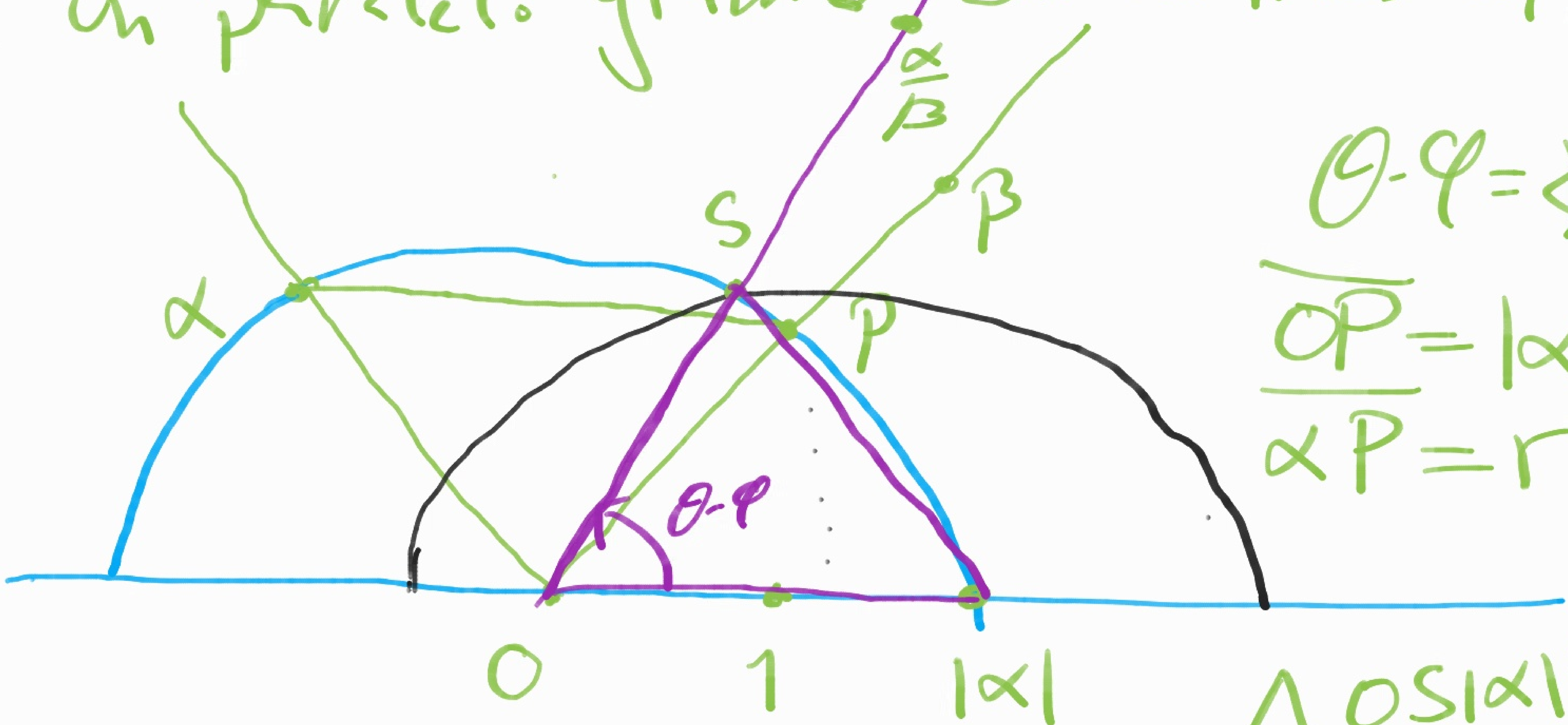
$$\Rightarrow x = h^2$$

Teorema: Los puntos construibles $K \subseteq \mathbb{C}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

Dem:

Es suficiente probar que para $\alpha, \beta \in K$ con $\beta \neq 0$, que $\alpha - \beta$ y $\frac{\alpha}{\beta}$ están en K.

Tenemos que $\alpha, -\beta, 0 \in K$, si estos tres puntos no son colineales la suma $\alpha - \beta$ se puede construir como el cuarto vertice de un paralelogramo con vertices $\alpha, -\beta$ y 0.



$\theta - \varphi = \sphericalangle \alpha O P$

$\overline{OP} = |\alpha|$

$\overline{\alpha P} = r$

$\Delta OS|\alpha| \cong \Delta O\alpha P$

El punto α/β esta en el rayo OS a distancia $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ la cual se puede construir por el lema anterior

$\therefore$ K es un campo tal que

$$\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}.$$