Tenemos que:

Campo $\Rightarrow$ Dominio Euclidiano $\Rightarrow$ DIP $\Rightarrow$ DFU $\Rightarrow$ Dominios Enteros

Ninguna de las implicaciones anteriores es reversible, como lo muestran los siguientes contraejemplos:

Contraejemplos:

$\not\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$

$\not\Leftarrow$ $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right] \hookrightarrow \mathbb{C}$

$\not\Leftarrow$ $\mathbb{Z}[x]$ aquí el ideal $\langle x, 2 \rangle$ no es principal.

$\not\Leftarrow$ Para este ejemplo recordemos que si $\pi \in D$ es primo entonces π es irreducible.

Si D es un DFU entonces se vale el regreso. Consideremos el anillo:

$$D = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

Veamos que 2, 3 y $1+\sqrt{5}i$ son irreducibles en D:

Supongamos que $2 = xy$ con $x, y \in D$. Notemos que $|r|^2 \in \mathbb{Z}$ $\forall r \in D$ donde $|\cdot|$ es la norma compleja.

$4 = |2|^2 = |xy|^2 = |x|^2 |y|^2 \in \mathbb{Z}$. Si $|x|^2 \neq 1$ ni $|y|^2 \neq 1$ entonces $|x|^2 = 2 = |y|^2$ ie si $x = a + bi\sqrt{5}$ ent $2 = |x|^2 = a^2 + 5b^2$, así $2 - 5b^2 = a^2 \geq 0$ pero si $b \neq 0$, $5b^2 \geq 5$

así $2-5b^2<0$ ∇ $\therefore$ $b=0$ y $2=a^2$

pero $\sqrt{2}=a\in\mathbb{Z}$ ∇ Por lo tanto

$|x|^2=1$ ó $|y|^2=1$ $\therefore$ $x=1$ ó $y=1$

$\therefore$ 2 es irreducible.

Sup. $3=xy$ y así $9=|3|^2=|x|^2|y|^2$. Si $|x|^2\neq 1$

$|y|^2=1$, ent $|x|^2=3$ y $|y|^2=3$. Si $|x|^2=3$

y $x=a+bi\sqrt{5}$ ent $3=a^2+5b^2 \Rightarrow 3-5b^2=a^2$

lo que implica que $b=0$ y ent $3=a^2$ ∇ $\therefore$ $x=1$ ó $y=1$

Sup que $1+\sqrt{5}i = xy$. Tomando $|\cdot|^2$, tenemos que $1+5=6=|1+\sqrt{5}|^2 = |x|^2|y|^2 \in \mathbb{Z}$.

Si $|x|^2 \neq 1$ y $|y|^2 \neq 1$. Entonces $|x|^2 = 2$ y $|y|^2 = 3$ ó $|x|^2 = 3$ y $|y|^2 = 2$. Por lo anterior esto no puede pasar, así que $|x|^2 = 1$ ó $|y| = 1$, i.e. $1+\sqrt{5}i$ es irreducible.

Notemos que $(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i) = 6 = 2(3)$ son dos factorizaciones en irreducibles del 6. Esto también implica que 2 es irreducible pero no es primo.

La característica de un campo.

Sea K un campo. Sabemos que existe un único morfismo de anillos $\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ con $\eta(1_{\mathbb{Z}}) = 1_K$. Consideremos $\mathrm{Ker}\,\eta$ que es un ideal de $\mathbb{Z}$. Por el primer teorema de isomorfismo, hay un morfismo de anillos inyectivo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr] & & K \\
& \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,\eta \arrow[ur, "\bar{\eta}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,\eta \cong \mathrm{Im}\,\eta$ como anillos.

En particular, como $\mathrm{Im}\,\eta \subseteq K$, $\mathrm{Im}\,\eta$ es un dominio entero.

Entonces podemos considerar a $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,\eta$ como un subanillo de K. Tenemos dos casos:

Si $\mathrm{Ker}\,\eta \neq 0$: Como $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,\eta$ es un dominio entero, ent $\mathrm{Ker}\,\eta$ es un ideal primo. Por lo tanto $\mathrm{Ker}\,\eta = p\mathbb{Z}$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. $\therefore\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow K$.

Esto me dice que $\underline{0}=\eta(p)=\eta(\underbrace{1+\cdots+1}_{p \text{ veces}})=\underbrace{1+\cdots+1}_{p \text{ veces}}\in K$

Si $\operatorname{Ker}\eta=0$, entonces $\eta:\mathbb{Z}\longrightarrow K$ es inyectivo.

esto implica que $\forall\, 0\neq n\in\mathbb{Z}$, $0\neq\eta(n)\in K$

por lo tanto $\eta(n)$ es invertible en K para todo $0\neq n\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\theta"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ Existe un morfismo inyectivo $\theta:\mathbb{Q}\hookrightarrow K$.

Def: Sea K un campo. Se dice que la característica de un campo es cero si $\operatorname{Ker}\eta = 0$.

En otro caso se dice que la característica de K es el primo $p \in \mathbb{Z}$ donde $\operatorname{Ker}\eta = p\mathbb{Z}$.

Necesitamos el siguiente morfismo de anillos: Sea R un anillo, $r \in R$ y tomemos el anillo $R[x]$. Definimos: $ev_r : R[x] \to R$ como $ev_r(f(x)) = f(r)$, es decir, si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $ev_r(f(x)) = a_0 + a\, r + \cdots + a_n r^n \in R$. A esta función se le llama el morfismo evaluación en r.

Extensiones de campos

Def: Sean F y E dos campos. Decimos que E es una extension de F si $F \subseteq E$ y F es un subanillo de E.

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

Notemos que por como se definió la característica de un campo, todo campo es extension de $\mathbb{Q}$ ó de un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Dado un dominio D y un campo F tal que $F \subseteq D$ entonces D es un F-espacio vectorial. La dimensión de ${}_F D$ la denotamos $[D:F]$ ó $[D:F]=\infty$ si no es finita.

$a,b \in D$ y $r \in F$ ent $r(a+b) = ra + rb \in D$

Ej • $K[x]$ es un K-esp. vec. $K \subseteq K[x]$ $\{1, x, x^2, \dots\}$

• $\mathbb{R}$ son un $\mathbb{Q}$-esp. vec $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\{1, i\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-esp y un $\mathbb{Q}$-esp. vec. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Def: Sea $F \subseteq E$ una extensión de campos y $\alpha \in E$. Se dice que α es algebraico sobre F si existe $0 \neq f(x) \in F[x]$ tal que $f(\alpha)=0$. Si α no es algebraico sobre F se dice que es trasecendente sobre F.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ ya que para $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ se tiene que $f(\sqrt{2}) = 0$

$\pi \in \mathbb{R}$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$ ie no existe un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\pi)=0$.
Notemos que $\pi \in \mathbb{R}$ es algebraico sobre $\mathbb{R}$ ya que $f(\pi)=0$ con $f(x)=x-\pi \in \mathbb{R}[x]$.

Dado un campo F, todo elemento de F es algebraico sobre F.
Ejemplo: Sea F un campo. Consideremos $F[t]$ que es un dominio entero. Entonces podemos considerar su campo de fracciones