Geometría Analítica del Espacio
Tarea 1

Prof. Mauricio Medina

1. Diga qué condiciones deben de cumplir las coordenadas de todos los puntos (x, y, z) que están en los siguentes conjuntos.
   (a) La unión de los planos P_{xy} y P_{yz}.
   (b) La unión de los planos P_{xz} y P_{yz}.
   (c) La unión de los planos P_{xy} y P_{xz}.
   (d) La intersección de los planos P_{xy} y P_{xz}.
   (e) La intersección de los planos P_{xz} y P_{yz}.
   (f) La intersección de los planos P_{xy} y P_{yz}.
2. Calcule los valores de x, y, z de tal forma que las dos ternas ordenadas sean iguales.
   (a) $(3, y, z + 1)$, $(3, 4, 5)$
   (b) $(x, 5, z - 2)$, $(4, 5, 2)$
   (c) $(x + 1, y - 3, z + 4)$, $(-2, 3, 6)$
   (d) $(x + 2, y - 2, z + 4)$, $(0, 0, 0)$
   (e) $(x + 4, 3, z + 5)$, $(4, y + 3, 2)$
   (f) $(1, y - 3, z + 2)$, $(x - 5, 4, 6)$
3. Calcule la distancia que separa a los puntos p y q.
   (a) $p = (1, 1, 2)$, $q = (2, 3, 4)$
   (b) $p = (-1, 1, 3)$, $q = (0, -1, 1)$
   (c) $p = (2, -1, 5)$, $q = (0, 2, -1)$
   (d) $p = (2, 1, 0)$, $q = (3, 5, 8)$
   (e) $p = (-2, 1, -3)$, $q = (2, 2, 5)$
   (f) $p = (5, 3, -6)$, $q = (2, -1, 6)$
4. Demuestre que los puntos $(3, 5, 2)$, $(2, 3, -1)$ y $(6, 1, -1)$ son los vertices de un triángulo rectángulo.

5. Demuestre que los puntos $(6,3,4)$, $(2,1,-2)$ y $(4,-1,10)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

6. Demuestre que los puntos $(2,-1,3)$, $(4,2,1)$ y $(-2,-7,7)$ están sobre una recta.

7. Dados los puntos p y q en el espacio, determine el vector $\overline{v}$ que traslada p a q, equivalentmente, el vector con punto inicial p y punto final q en forma de terna, en su expresión usando los vectore **i,j** y **k** y calcule su norma.

   (a) $p = (2,1,5)$, $q = (4,3,3)$
   (b) $p = (2,-1,5)$, $q = (5,-1,0)$
   (c) $p = (0,4,5)$, $q = (-3,2,-1)$
   (d) $p = (3,0,-2)$, $q = (3,3,3)$
   (e) $p = (5,-1,0)$, $q = (-3,0,0)$
   (f) $p = (8,-6,-2)$, $q = (5,1,-1)$

8. Sean $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y sean $r, s \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

   (a) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$.
   (b) $r\overline{v} = \overline{0}$ si y solo si $r = 0$ o $\overline{v} = \overline{0}$.
   (c) $(r + s)\overline{v} = r\overline{v} + s\overline{v}$

9. Obtenga el vector unidad que va en la dirección del vector con punto inicial p y punto final q.

   (a) $p = (1,-2,5)$, $q = (4,0,11)$
   (b) $p = (-3,1,0)$, $q = (-2,3,2)$
   (c) $p = (9,2,-1)$, $q = (-3,5,-5)$
   (d) $p = (10,9,-2)$, $q = (3,4,-3)$
   (e) $p = (-3,-1,-2)$, $q = (1,3,-2)$

10. Obtenga el vector $\overline{u}$ cuya norma se da y que tiene el mismo sentido que el vector $\overline{v}$.

    (a) $\| \overline{u} \| = 8$; $\overline{v} = (1,2,5)$
    (b) $\| \overline{u} \| = \frac{1}{4}$; $\overline{v} = (3,0,4)$
    (c) $\| \overline{u} \| = 7\sqrt{2}$; $\overline{v}(-3,5,-4)$

11. Obtenga el vector $\overline{u}$ cuya norma se da y que tiene sentido opuesto al vector $\overline{v}$.

    (a) $\| \overline{u} \| = \frac{1}{2}$; $\overline{v} = (6,12,4)$
    (b) $\| \overline{u} \| = 6$; $\overline{v} = (3,3,3)$

(c) $\| \overline{u} \| = 14$; $\overline{v} = (6, 4, -2)$

12. Demuestre que si un vector $\overline{v}$ es paralelo al eje X entonces sus cosenos directores son $(1, 0, 0)$ o bien $(-1, 0, 0)$.

13. Calcule el producto punto $\overline{u} \cdot \overline{v}$.

    (a) $\overline{u} = (-3, 2, 0)$, $\overline{v} = (1, 1, 1)$

    (b) $\overline{u} = (-2, 3, -6)$, $\overline{v} = (0, 4, -9)$

    (c) $\overline{u} = (-3, -4, -5)$, $\overline{v} = (5, \frac{3}{4}, -2)$

14. Sean $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $r \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

    (a) $r(\overline{u} \cdot \overline{v}) = (r\overline{u}) \cdot \overline{v}$.

    (b) $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \cdot \overline{v}) + (\overline{u} \cdot \overline{w})$.

    (c) $\| \overline{u} + \overline{v} \|^2 = \| \overline{u} \|^2 + 2\overline{u} \cdot \overline{v} + \| \overline{v} \|^2$.

15. Calcule el coseno del ángulo que forman los siguientes vectores.

    (a) $(2, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$

    (b) $(6, -2, 4)$, $(5, -4, 3)$

    (c) $(2, 2, -1)$, $(1, 1, 1)$

    (d) $(2, 3, 5)$, $(5, -2, 3)$

    (e) $(1, -1, -2)$, $(-2, -1, 1)$

    (f) $(2, 1, 3)$, $(-3, 3, -1)$

16. Calcule el valor de x, y o z de tal forma que los vectores sean perpendiculares.

    (a) $(3, -6, -2)$, $(4, 2, z)$

    (b) $(8, -3, 6)$, $(3, y - 1)$

    (c) $(5, 15, 7)$, $(14, 7, z)$

    (d) $(2, -1, 3)$, $(x, -9, -1)$

    (e) $(2, 5, -6)$, $(5, y, 10)$

    (f) $(5, -4, 2)$, $(x, 3, 1)$

17. Obtenga la componente escalar de $\overline{v}$ sobre $\overline{u}$.

    (a) $\overline{u} = (2, 1, 2)$, $\overline{v} = (2, 1, 1)$

    (b) $\overline{u} = (3, 0, -4)$, $\overline{v} = (1, -3, 4)$

    (c) $\overline{u} = (0, -1, 0)$, $\overline{v} = (-3, 4, -1)$

    (d) $\overline{u} = (12, 5, 0)$, $\overline{v} = (3, 1, -2)$

    (e) $\overline{u} = (1, -3, 2)$, $\overline{v} = (4, 3, 1)$

(f) $\overline{u} = (-2, 3, 1)$, $\overline{v} = (0, -2, 4)$

18. Demuestre que el triángulo con los siguientes vértices es un triangulo rectangulo.

    (a) $o = (2, 7, 1)$, $p = (8, 5, 5)$ y $q = (7, 3, 4)$.

    (b) $o = (3, 1, -2)$, $p = (8, 4, 6)$ y $q = (6, 7, 0)$.