Como el índice de $S\cap T$ en S es 5, $S\cap T \triangleleft S$ y de la misma forma $T\cap S \triangleleft T$. Sea $H = N_G(S\cap T)$. Como $e \neq S\cap T$ y G es simple, $H \lneq G$. Tenemos que $S \subseteq H$ y $T \subseteq H$. Por Lagrange, $S, T \in Syl_5(H)$ lo que implica que $n_5(H) > 1$. Como $n_5(H) \equiv 1 \mod 5$, $n_5(H) = 2^4 = 16$. Por lo tanto $2^4 \cdot 5^3 \mid |H|$. Esto implica que $[G:H] \leq 2^2$. Por el "n!-Teorema", $|G| \mid 4!$ ¡!.

P-Grupos

Lema: Sea P un p-grupo finito actuando en un conjunto finito Ω y sea

$$\Omega_0 = \{\alpha \in \Omega \,/\, x\cdot\alpha = \alpha \quad \forall x \in P\}.$$

Entonces $|\Omega| \equiv |\Omega_0| \mod p$.

Dem:

Por el FCP, el tamaño de cada orbita con mas de 1 elemento es divisible por p.

Como los elementos de Ω_0 son justamente los elementos que determinan una orbita de tamaño 1, se sigue que $p \mid |\Omega|-|\Omega_0|$ ie $|\Omega| \equiv |\Omega_0| \bmod p$.

Teorema

Supongamos que $1 < N \trianglelefteq P$ con P un p-grupo finito. Entonces $N \cap Z(P) \neq e$. En particular un p-grupo no trivial tiene centro no trivial.

Dem:

Como $N \trianglelefteq P$, P actua por conjugacion en N. Los puntos fijos de esta acción son precisamente $N \cap Z(P)$ así que $|N \cap Z(P)| \equiv |N| \bmod p$. Como $N \neq e$ y es p-grupo, $|N| \equiv 0 \bmod p$ lo que implica que $p \mid |N \cap Z(P)|$. Por lo tanto $N \cap Z(P) \neq e$.

Cor. Si P es un p-grupo simple finito, entonces $|P| = p$.

Dem:

Tenemos que $e \neq Z(P) \trianglelefteq P$. Como P es simple, $Z(P) = P$ y entonces P es abeliano.

Al ser P simple, se tiene que dar que $|P| = p$.

Cor. Sea P un p-grupo finito no trivial. Entonces P tiene un subgrupo de indice p y cada uno de estos subgrupos es normal.

Dem:

Como $P \neq e$, podemos encontrar un subgrupo normal maximo de P. Digamos que N es un maximo, ie, $N \triangleleft P$ y si $M \triangleleft P$ con $N < M \leq P$, entonces $M = P$. Por el Teorema de la correspondencia, P/N es un p-grupo simple. Por el corolario anterior $[G:N]=p$.

Si $N \leq P$ es tal que $[G:N]=p$, ent $N \triangleleft P$ ya que tiene indice el menor primo que divide $|P|$.

Cor. Sea G finito y sup $p^{\ell} \mid |G|$ con p primo. Entonces G tiene un subgrupo de orden p^{ℓ}.