Def. Sup que G actua en Ω el caracter de permutacion es la funcion $\chi : G \to \mathbb{Z}$ definida como $\chi(g) = |\{\alpha \in \Omega \mid g \cdot \alpha = \alpha\}|$.

Ej. Si pensamos al producto de G como una accion de G en G, entonces

$$\chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq e \\ |G| & \text{si } g = e \end{cases}$$

- En la acción de G en si mismo por conjugación tenemos que:

$$\chi(g) = |\{x \in G \mid g \cdot x = x\}| = |\{x \in G \mid g^{-1} x g = x\}| = |\{x \in G \mid xg = gx\}| = |C_G(g)|.$$

Teorema (Cauchy-Frobenius)

Sup que G actua en Ω con G y Ω finitos. Entonces el número total n de orbitas está dado por $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha|$.

Dem:

Consideremos el conjunto $S = \{(g,\alpha) \in G \times \Omega \mid g \cdot \alpha = \alpha\}$. Por un lado, para cada $\alpha \in \Omega$, hay $|G_\alpha|$ elementos $g \in G$ tal que $(g,\alpha) \in S$, entonces

$$|S| = \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha|$$

Por otro lado, dado $g \in G$, el número de elementos $\alpha \in \Omega$ tales que $(g,\alpha) \in S$ es $\chi(g)$, así que $|S| = \sum_{g \in G} \chi(g)$. Por lo tanto:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha| = \sum_{\alpha \in \Omega} \frac{1}{|\mathcal{O}_\alpha|} \quad \text{por el (FCP)}$$

Notemos que la suma de $\frac{1}{|\mathcal{O}|}$ tantas veces como elementos en $|\mathcal{O}|$ es 1. Así la suma del lado derecho es el número n de orbitas.

La Formula de Cauchy-Frobenius nos dice que el número de orbitas es el valor promedio de la funcion de permutacion χ.

Def. Decimos que un grupo G actua transitivamente en un conjunto Ω si para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega$ existe un $g \in G$ tal que $g \cdot \alpha = \beta$.

Obs: G actua transitivamente en Ω si y solo si la acción tiene una única orbita.

Cor. Sup que G actua transitivamente en Ω con G finito y $|\Omega| > 1$. Entonces existe $g \in G$ que no fija a ningún elemento de Ω.

Dem:

Por hipotesis solo hay una orbita. Entonces el valor promedio de χ es 1. Como $\chi(e) = |\Omega| > 1$ debe de existir un $g \in G$ con $\chi(g)$ por abajo del promedio, es decir, existe $g \in G$ con $\chi(g) < 1$. Por lo tanto, $\chi(g) = 0$.