A H^g se le llama un subgrup conjugado de H.

Si tenemos C char G, entonces $C^g = C$ para todo $g \in G$. Si consideramos $x \in Z(G)$, $x^g = x$. En particular $Z(G)^g = Z(G)$.

No necesariamente $H^g = H$ implica $h^g = h$ $\forall h \in H$

Def. Un subgrupo $N \leq G$ es normal si $N^g = N$ para todo $g \in G$ y lo denotamos como $N \trianglelefteq G$.

Ejemplos:

·) e y G son subgrupos normales

··) Todo subgrupo característico es normal.

···) Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

Lema: Sea $H \leq G$. Entonces $H \triangleleft G$ si $H^g \subseteq H$ para todo $g \in G$.

Dem:

Sup. $H^g \subseteq H$ $\forall g \in G$. Entonces

$$H = \left(H^g\right)^{g^{-1}} \subseteq H^{g^{-1}} \quad \forall g \in G$$

Aplicamos esto al elemento g^{-1}, es decir,

$$H \subseteq H^{(g^{-1})^{-1}} = H^g.$$ Por lo tanto $H^g = H$

$\forall g \in G$ así, $H \triangleleft G$.

Por ejemplo consideremos $G = D_{2n}$, el grupo diedrico. Sea R el subgrupo de G que consta de todas las rotaciones del n-agono en el plano. Notemos que R es un grupo cíclico de orden n. En particular R es abeliano. Por lo tanto $R^g = R \ \forall g \in R$

Ahora sea g una reflexion, entonces al aplicar g al n-agono estamos intercambiando la cara. Sea $r \in R$. Entonces $g^{-1} r g = g r g$ NO intercambia las caras. Por lo tanto $r^g \in R$

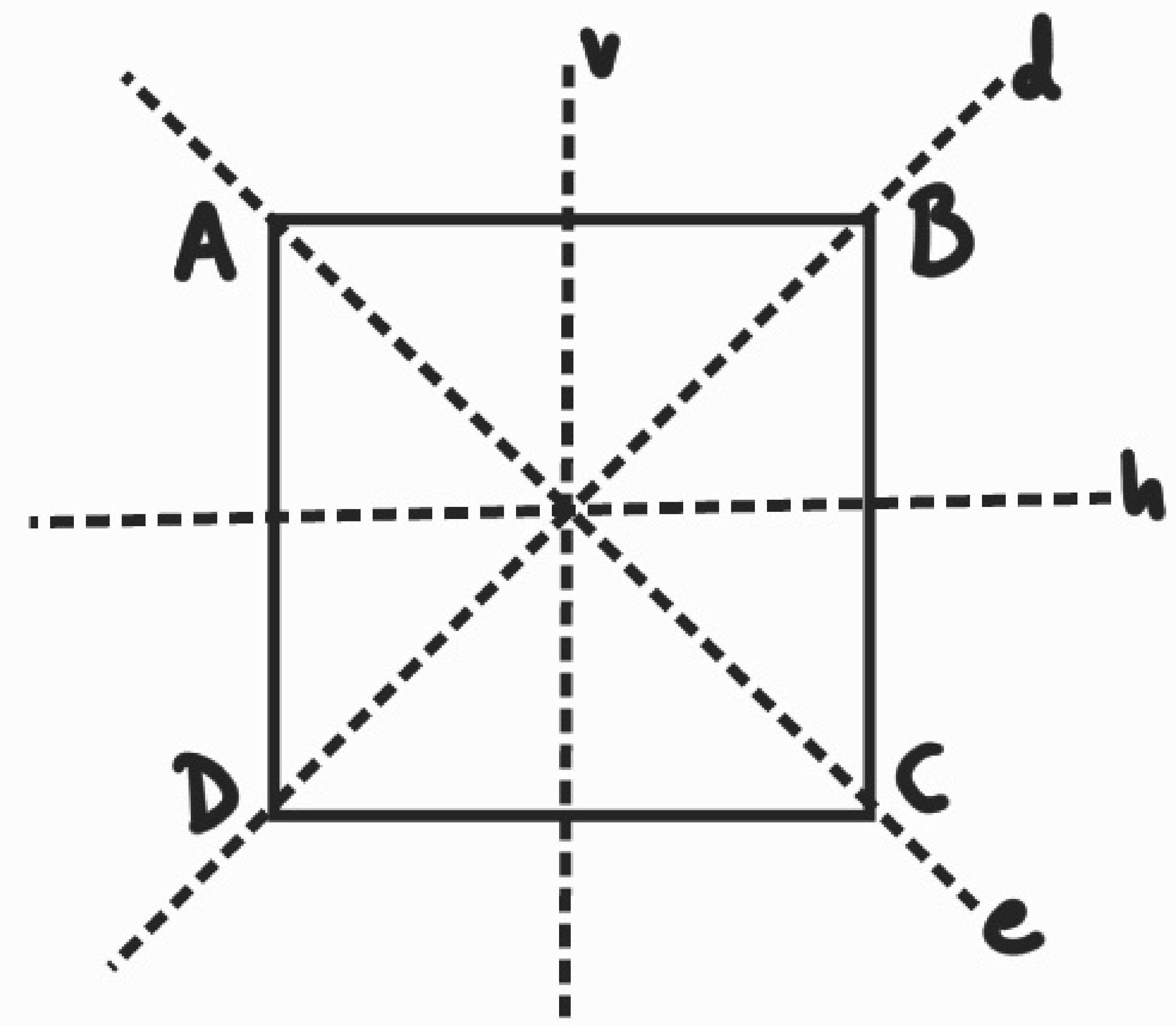
$$\therefore R \trianglelefteq D_{2n}$$

Con la notacion que hemos usado de D_8

$$D_8 = \{Id, 90, 180, 270, v, h, d, e\}$$

Sean $H = \langle v \rangle = \{Id, \underline{v}\}$

$K = \langle v, 180^\circ \rangle = \{Id, v, 180^\circ, h\}$



$H \triangleleft K$ y $K \triangleleft D_8$ Pero

H <u>no</u> es normal en D_8 ya que

$$v^d = dvd = h \notin \langle v \rangle$$

Lema: Sea $N \trianglelefteq G$ y supongamos que C char N. Entonces $C \trianglelefteq G$.

Dem:

Sea $g \in G$. Quiero probar que $C^g = C$.
Como $N \trianglelefteq G$, $N^g = N$ así que el automorfismo interior de G, θ_g determina un automorfismo $\theta_g|_N$ en N. Como C es caraterístico en N, $\theta_g|_N(C) = C$.
Por lo tanto $C^g = C$.

Teorema.

Sea G un grupo. Entonces $\mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$.

Dem:

Sean $\theta_g \in \mathrm{Inn}(G)$ y $\sigma \in \underline{\mathrm{Aut}(G)}$. Entonces

$$\theta_g^{\sigma}(x) = (\sigma^{-1} \circ \theta_g \circ \sigma)(x) = \sigma^{-1}(g^{-1}\sigma(x)g)$$

$$= \sigma^{-1}(g^{-1})\sigma^{-1}\sigma(x)\sigma^{-1}(g) = [\sigma^{-1}(g)]^{-1} x \, \sigma^{-1}(g)$$

Por lo tanto $\theta_g^{\sigma} = \theta_{\sigma^{-1}(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$.

$\therefore \mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$

Sean X, Y subconjuntos de un grupo G. Escribimos:

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Lema: Sean $H, K \leq G$. HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.

Dem:

$\Rightarrow$ Sup. que $HK \leq G$. Para cada $h \in H$, $he \in HK$. Por lo tanto $H \subseteq HK$. De la misma manera $K \subseteq HK$. Como HK es cerrado bajo la operacion $KH \subseteq HK$. La otra contención es analoga.

$\Leftarrow$] Sup. $HK = KH$. Sean $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$

Consideremos el producto $\underbrace{h_1k_1(h_2k_2)^{-1}}_{} = h_1\underbrace{k_1k_2^{-1}}_{}h_2^{-1}$

$= h_1\underbrace{kh_2^{-1}}_{}$. Por hip. $kh_2^{-1} \in HK$, entonces

$kh_2^{-1} = h_3k_3$. Por lo tanto

$$h_1kh_2^{-1} = (h_1h_3)k_3 \in HK. \quad \therefore HK \leq G$$

$\square$