Lema: Sup. $|G| = p^l m$ con $l > 0$, $m > 1$ y $p \nmid m$. Si G es simple, entonces $n = n_p(G)$ satisface lo siguiente:

i) $n \mid m$
ii) $n \equiv 1 \mod p$
iii) $|G| \mid n!$

Dem:

(i) y (ii) ya los sabíamos por resultados anteriores. Consideremos $S \in Syl_p(G)$ y sea $H = N_G(S)$. Entonces $n = [G:H]$. Como G es simple, S no puede ser normal así que $n > 1$. Por uno de los primeros teoremas de acciones, $|G| \mid n!$ por ser simple.

Ejemplo. Si $|G| = 1{,}000{,}000 = 2^6 5^6$ entonces G <u>no</u> es simple.

Dem:

Aplicamos el lema con $p = 5$. Entonces $n = n_p(G)$ tiene que dividir a 2^6 y los únicos divisores n de 2^6 congruentes con 1 mod 5 son 1 y 16. Notemos que ni 1 ni 16 son lo suficientemente grandes para que $|G| \mid n!$, de hecho $16!$ es solo divisible por 5^3.

Ejemplo. Si $|G| = 2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$, entonces G no es simple.

Dem:

Supongamos que G es simple. Aplicamos el lema a $p=11$. Checando los divisores de $2^3 \cdot 3^3$ tenemos que la unica posibilidad para $n_{11}(G)$ es $2^2 \cdot 3 = 12$. Queremos encontrar un subgrupo H con $[G:H]=n$ tal que $1<n<11$. Así $|G|$ no dividiria a $n!$ y tendríamos una contradiccion.

Sea $S \in Syl_{11}(G)$ y $N = N_G(S)$. Entonces $[G:N] = n_{11}(G) = 2^2 \cdot 3$ y $|N| = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$. Sea $C = C_G(S)$. Por el ejercicio 9 de la tarea 2 (Teorema N/C), N/C es isomorfo a un subgrupo de $Aut(S)$ y nosotros sabemos que $|Aut(S)| = \varphi(11) = 10$ ya que S es cíclico de orden primo. Se sigue que $[N:C]$ divide a 10 y 3^2 divide a $|C|$.

Sea $P \in Syl_3(C)$. Entonces $|P| = 3^2$ y sea $H = N_G(P)$. Como G es simple $H < G$.

Now, $P \subseteq C = C_G(S)$ así que $S \subseteq C_G(P) \leq N_G(P) = H$. Por lo tanto $|H|$ es divisible por 11.

Por el Teorema D-Sylow, existe $Q \in Syl_3(G)$ t.q. $P \subseteq Q$ y tenemos que $[Q:P] = 3$. Como 3 es el menor primo que divide a $|Q|$, $P \trianglelefteq Q$. Entonces $Q \leq N_G(P) = H$. Por lo tanto 3^3 también divide a $|H|$. Tenemos que $3^3 \cdot 11$ divide a $|H|$ lo que implica $[G:H] \leq 2^3 < 11$ como queríamos.

Ejemplo: Si $|G| = 8000 = 2^6 \cdot 5^3$, entonces G no es simple.

Dem:

Supongamos que G es simple. Consideremos $n_5(G)$. Entonces $n_5(G) \equiv 1 \mod 5$ y $n_5(G) \mid 2^6$. Así $n_5(G) = 16$. Como $16 \not\equiv 1 \mod 5^2$, por el Teorema de Sylow de conteo existen $S, T \in Syl_5(G)$ con $S \neq T$ y $5^2 > [S : S \cap T]$. Se sigue que $[S : S \cap T] = 5$.