$X \subseteq G$, su estabilizador en G es $G_X = \{g \in G / X^g = X\} = N_G(X)$.

- Supongamos que G actua por multiplicación en las clases laterales izquierdas de $H \leq G$.

Entonces el estabilizador de xH es $G_{xH} = \{g \in G / g \cdot xH = xH\} = \{g \in G / gxH = xH\} = \{g \in G / gx \in xH\}$
$= \{g \in G / g \in xHx^{-1}\} = H^{x^{-1}}$

Teorema:

Supongamos que G actua en Ω y sea $\mathcal{O}$ una orbita de esta acción. Sea $\alpha \in \mathcal{O}$ y $H = G_\alpha$
Entonces hay una biyección entre $\mathcal{O}$ y $\{xH / x \in G\}$.

Dem:

Definimos $f: \mathcal{O} \longrightarrow \{xH / x \in G\}$ de la siguiente manera: si $\beta \in \mathcal{O}$, escojemos $x \in G$ tal que $\beta = x \cdot \alpha$ y ponemos $f(\beta) = xH$. Ahora $y \cdot \alpha = \beta = x \cdot \alpha \Leftrightarrow x^{-1} y \cdot \alpha = \alpha \Leftrightarrow x^{-1} y \in G_\alpha = H$
$\Leftrightarrow yH = xH$. Por lo tanto f está bien definida y es inyectiva. Por otro lado, si xH es

una clase lateral, entonces $f(x \cdot \alpha) = xH$. Por lo tanto f es suprayectiva y entonces f es una biyeccion.

El Pricipio Fundamental de Conteo (FCP)

Sup. que G actua en Ω y sea $\mathcal{O}$ una orbita de esta acción. Entonces

$$|\mathcal{O}| = [G : G_\alpha] \ \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

Si G es finito, tenemos que $|\mathcal{O}| = |G|/|G_\alpha|$, en particular, $|\mathcal{O}|$ divide a $|G|$.

Cor. Sea $g \in G$ y $cl(g)$ la clase de conjugación que contiene a g. Entonces $|cl(g)| = [G : C_G(g)]$. En particular para un grupo finito, el tamaño de las clases de conjugación dividen al orden del grupo.

Dem:

$cl(g)$ es una orbita de la acción por conjugacion de G en G y $C_G(g)$ es el estabilizador de g. Por FCP tenemos el resultado.

Cor. Sea G un grupo finito. Sup. que cualesquiera dos elementos de G distintos del neutro son conjugados. Entonces $|G| \leq 2$.

Dem:

Si $|G| = n$, entonces por hipótesis G tiene una clase de conjugación de tamaño $n-1$. Asi que $n-1 \mid n$. Si $n > 1$, ent $n \geqslant 2(n-1)$ lo que implica que $n \leq 2$.

Cor. Sea $X \subseteq G$. Entonces el numero de conjugados de X (contando X) es $[G : N_G(X)]$.

Cor. Sea $H \leq G$ con G finito. Si $\bigcup_{g \in G} H^g = G$, entonces $H = G$.

Dem:

Sea $N = N_G(H)$. Por el corolario anterior, hay exactamente $[G:N]$ distintos conjugados H^g.

Así $|G|-1=|G\setminus\{e\}|=\left|\bigcup_{g\in G} H^g\setminus\{e\}\right|\leq|G:N|(|H|-1)$ ya que $|H^g|=|H|$ $\forall g$. Como $H\subseteq N$

$[G:N]\leq[G:H]$ y así $|G|-1\leq[G:H](|H|-1)=|G|-[G:H]$. Por lo tanto $[G:H]\leq 1$.

Cor. Sean $H,K\leq G$ subgrupos finitos de G. Entonces $|HK|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}$.

Dem:

Sea $\Omega=\{xK \mid x\in G\}$ y tomemos la acción por multiplicacion de H en Ω.

Tenemos que $HK=\bigcup_{h\in H} hK$. Como $hK=h\cdot K$, entonces HK es la unión de las clases laterales que estan en la orbita $\mathcal{O}$ de K. También se tiene que las clases laterales son ajenas y cada una tiene tamaño $|K|$, así que $|HK|=|\mathcal{O}||K|$. Ahora, el estabilizador de K en esta acción es $H_K=\{h\in H \mid h\cdot K=K\}=\{h\in H \mid hK=K\}=H\cap K$.

Por lo tanto $|\mathcal{O}|=|H|/|H\cap K|$ por FCP.

Notemos que en esta prueba <u>no</u> asumimos que HK fuera un subgrupo de G.