$|X|=|G|-p^2(q-1)=p^2q-p^2(q-1)=p^2(q-q+1)=p^2$, y cada elemento de orden distinto de q está en X.

Sea $S\in Syl_p(G)$. Como ningún elemento de S tiene orden q, $S\subseteq X$. Como $|S|=p^2=|X|$, $S=X$. Por lo tanto S es único y normal.

Teorema. Sea $|G|=p^3q$ con p y q primos. Entonces, G tiene un p- ó un q-subgrupo de Sylow normal ó $p=2$, $q=3$ y $|G|=24$.

Dem:

Podemos suponer que $p\neq q$ y que $n_q(G)>1$. Entonces tenemos trés posibles valores para $n_q(G)$ que son p, p^2 y p^3.

También podemos suponer que $n_p(G)>1$ y así $n_p(G)=q$ con $q\equiv 1 \mod p$. Así $p<q$ y no podemos tener que $p\equiv 1 \mod q$. Esto descarta el caso $n_q(G)=p$.

Ahora supongamos que $n_q(G)=p^3$. Como un q-subgrupo de Sylow tiene orden q, todo elemento distinto del neutro en un q-subgrupo de Sylow tiene orden q. Entonces tenemos $p^3(q-1)$ elementos de orden q en G. El conjunto $X \subseteq G$ de los elementos con orden distinto de q, tiene tamaño $|X| = |G| - p^3(q-1) = p^3q - p^3(q-1) = p^3$. Como en la prueba pasada, un p-subgrupo de Sylow de G debe igualar a X y por lo tanto ser unico y normal, contradiciendo que $n_p(G) > 1$.

Finalmente, supongamos que $n_q(G) = p^2$. Entonces $p^2 \equiv 1 \mod q$ ie $q \mid p^2-1$. Así que $q \mid (p+1)(p-1)$. Como q es primo, $q \mid p+1$ ó $q \mid p-1$. Como $q > p$, no pasa que $q \mid p-1$ y entonces $q \mid p+1$. Por lo tanto $p < q \leq p+1$ y entonces $q = p+1$.

Como 2 y 3 son el unico par de primos consecutivos, se sigue que $p=2$, $q=3$ y $|G| = 24$.

El grupo S_4 es un ejemplo de un grupo de orden p^3q que no tiene p- ni q-subgrupos de Sylow normales y de hecho es el único salvo isomorfismo.

Ejemplo:

Para estudiar los elementos de S_n introducimos la notación cíclica:

un r-ciclo en S_n es una sucesión de r símbolos de $\{1,2,\dots,n\}$ i.e, $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ con $i_j \in \{1,2,\dots,r\}$. La manera interpretar un r-ciclo en S_n es que $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ representa a la biyección que manda a $i_j \mapsto i_{j+1}$ y $i_r \mapsto i_1$ y fija a todo símbolo distinto de $i_1, \dots, i_r$. Notemos que un r-cíclo compuesto r veces es la Id.

Más adelante estudiaremos a detalle esto. Con la notación cíclica:

$S_1 = \{(1) = Id\}$, $S_2 = \{Id, (1\,2)\}$, $S_3 = \{Id, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$.

Consideremos S_4. $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Entonces $n_2(S_4) \equiv 1 \bmod 2$ y $n_2(S_4) \mid 3$. Así que $n_2(S_4) = 1$ ó 3. Por otro lado, $n_3(S_4) \equiv 1 \bmod 3$ y $n_3(S_4) \mid 8$. Así que $n_3(S_4) = 1$ ó 4.

Notemos que hay 8 3-cíclos en S_4:

$(1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,4\,3), (1\,3\,4), (2\,3\,4), (2\,4\,3)$

Como los 3-subgrupos de Sylow de S_4 tienen orden 3, no es posible que S_4 tenga un único 3-subgrupo de Sylow, pues tendría que contener a todos los 3-cíclos.

Por lo tanto S_4 tiene 4 3-subgrupos de Sylow. Los cuales son:

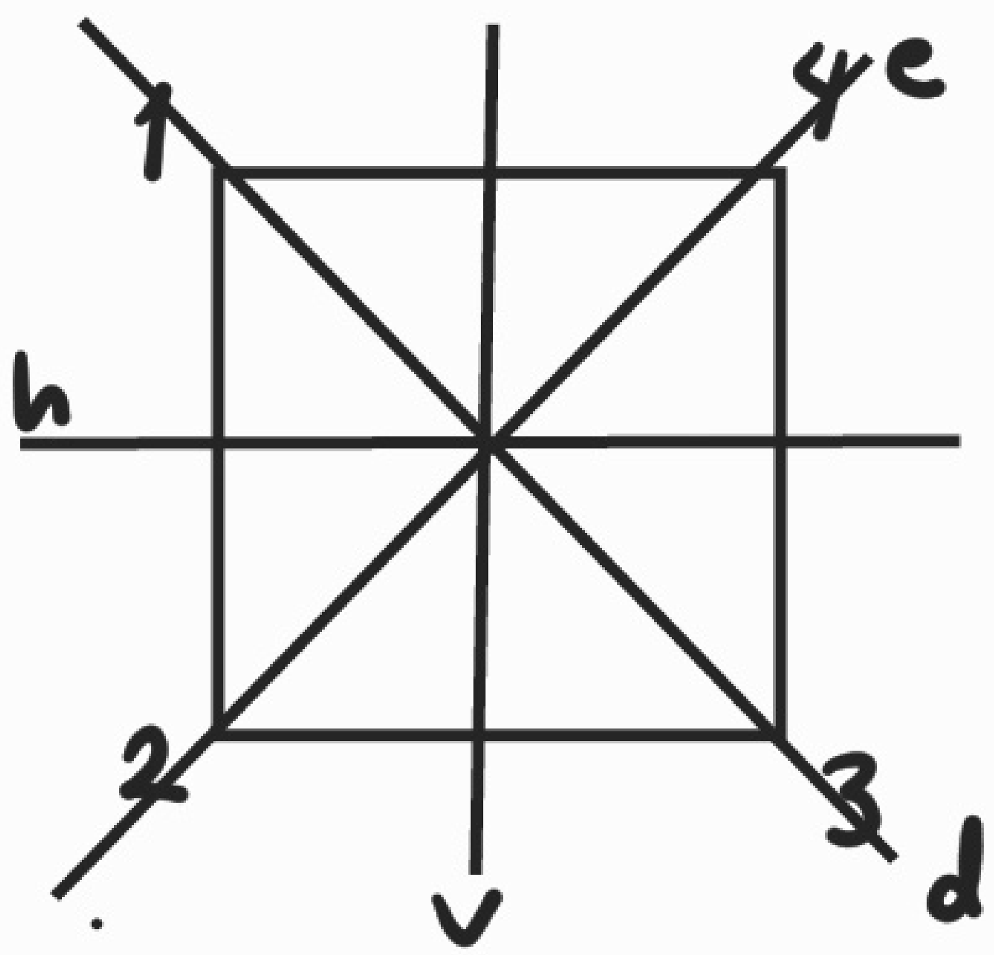
$\{Id, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$, $\{Id, (1\,2\,4), (1\,4\,2)\}$, $\{Id, (1\,4\,3), (1\,3\,4)\}$ y $\{Id, (2\,3\,4), (2\,4\,3)\}$

Ahora, en S_4 tenemos los siguientes elementos de orden 2:

$(1\,2), (1\,3), (1\,4), (2\,3), (2\,4), (3\,4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.

Igual que arriba, como los 2-subgrupos de Sylow de S_4 tienen orden 8 no es posible que exista solo uno. Por lo tanto S_4 tiene 3 2-subgrupos de Sylow.

Para describir estos 2-subgrupos de Sylow de S_4 nos apoyamos en D_8.



Sabemos que D_8 es isomorfo a un subgrupo de S_4 ya que cada simetría del cuadrado me da una biyeccion entre los 4 vértices.

Usando la notación cíclica:

La rotación de $90°$ manda $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ y $4 \mapsto 1$ ie, le corresponde el ciclo $(1\,2\,3\,4)$. A la rotación de $180°$ le corresponde $(1\,3)(2\,4)$, a la rotación de $270°$ le toca $(1\,4\,3\,2)$. Las reflexiones en d y e les corresponden $(2\,4)$ y $(1\,3)$ respectivamente pues fijan dos vertices. A las reflexiones v y h les corresponden $(1\,4)(2\,3)$ y $(1\,2)(3\,4)$ respectivamente. Por lo tanto:

$$\{Id, (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2), (2\,4), (1\,3), (1\,4)(2\,3), (1\,2)(3\,4)\} \cong D_8$$ es un 2-subgrupo de Sylow de S_4. De la misma manera pueden encontrar los otros dos.