Teorema:

Sea $H \leqslant G$ y sea N el kernel de la accion de G en las clases laterales de H dada por la multiplicación. Entonces

i) $N = \bigcap_{x \in G} H^x$ y

ii) si $M \triangleleft G$ con $M \subseteq H$, entonces $M \subseteq N$.

Dem:

Sean $x, g \in G$. Entonces $g \cdot (xH) = xH \iff gxH = xH \iff gx \in xH$. Así que g fija a $xH \iff g \in xHx^{-1}$. $\therefore g \in N \iff g \in \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$.

Ahora sea $M \leq H$ y $M \triangleleft G$. Para $x \in G$, $M = M^x \subseteq H^x$ y así $M \subseteq \bigcap H^x = N$.

Def: Sea $H \leq G$. El corazón de H en G es el mayor subgrupo normal N de G que está contenido en H. Lo denotamos como $N = \mathrm{core}_G(H)$.

Def: Sup. que G actua en el conjunto Ω. Definimos la orbita de $\alpha \in \Omega$ como el conjunto $\mathcal{O}_\alpha = \{g \cdot \alpha \mid g \in G\} \subseteq \Omega$.

Lema. Sup que G actua en Ω. Entonces las orbitas de la acción son una partición del conjunto Ω. Es decir,

i) Ω es la unión de las orbitas, y

ii) dos orbitas distintas son ajenas.

Dem:

Es claro que $\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{O}_\alpha \subseteq \Omega$. Si $\alpha \in \Omega$, entonces $\alpha = e \cdot \alpha \in \mathcal{O}_\alpha$. Por lo tanto $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{O}_\alpha$.

Ahora veamos que si $\gamma \in \mathcal{O}_\alpha$, entonces $\mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_\alpha$. Si $\gamma \in \mathcal{O}_\alpha$, entonces existe $h \in G$ tal que $\gamma = h \cdot \alpha$. Así $g \cdot \gamma = g \cdot (h \cdot \alpha) = (gh) \cdot \alpha \in \mathcal{O}_\alpha$ para todo $g \in G$. Por lo tanto $\mathcal{O}_\gamma \subseteq \mathcal{O}_\alpha$. El hecho de que $\gamma = h \cdot \alpha$, implica que $h^{-1} \cdot \gamma = \alpha$. El mismo argumento anterior nos da que $\mathcal{O}_\alpha \subseteq \mathcal{O}_\gamma$. $\therefore \mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\gamma$. Finalmente, si $\gamma = \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$, entonces

$\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_\beta$.

Esta partición en orbitas es similar a la partición de un grupo en clases laterales.

Sea $H \leq G$ y consideremos la acción de H en G dada por $h \cdot g = hg$. Entonces $\mathcal{O}_g = \{h \cdot g \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\} = Hg$. Por el lema anterior, las clases laterales derechas de H dan una particion de G.

Veamos otros ejemplos. Tomemos la acción de G en G dada por conjugacion. Entonces $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ con $x \in G$. En este caso $\mathcal{O}_x$ es llamada la clase de conjugacion de x en G. Por el lema anterior las clases de conjugacion particionan a G.

Notemos que $\mathcal{O}_x = \{x\}$ si y solo si $x \in Z(G)$.

En D_8 las clases de conjugación son $\{e\}$, $\{180\}$, $\{90, 270\}$, $\{d, e\}$ y $\{v, h\}$.

Ahora, tambien puede ser que G actue en $\Omega = \{H \leq G\}$ por conjugación. Entonces, $\mathcal{O}_H = \{g \cdot H \mid g \in G\} = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$. En este caso a $\mathcal{O}_H$ (también) se le llama la clase de conjugación de H en G. Por el lema anterior, las clases de conjugacion (de subgrupos) particionan a Ω. Notemos que $\mathcal{O}_H = \{H\}$ si y solo si $H \trianglelefteq G$.

Def. Sup que G actua en Ω y sea $\alpha \in \Omega$. El estabilizador de α en G es el subconjunto $G_\alpha = \{g \in G \,/\, g \cdot \alpha = \alpha\} \subseteq G$.

El estabilizador de un elemento siempre es un subgrupo de G.

Ejemplos:

- Supongamos que G actua en sí mismo por conjugación. Si $x \in G$, entonces su estabilizador en G es $G_x = \{g \in G \,/\, x^g = x\} = \{g \in G \,/\, xg = gx\} = C_G(x)$.
- Ahora, si G actua por conjugacion en el conjunto de sus subconjuntos, entonces para