$$C_G(g)=\{x\in G \mid xg=gx\}$$

Por un ejercicio de la tarea, $C_G(g)$ es un subgrupo de G para cada $g\in G$.

También podemos definir el centralizador de un subconjunto $X\subseteq G$ como:

$$C_G(X)=\{g\in G \mid gx=xg \ \forall x\in X\}=\bigcap_{x\in X} C_G(x)$$

Por un resultado anterior $C_G(X)$ es un subgrupo de G. Cuando tomamos $X=G$ se tiene el subgrupo $Z(G)=C_G(G)$ al que se le llama el centro del grupo G.

Obs: G es abeliano si y solo si $Z(G)=G$.

Es posible que el centro de un grupo G sea trivial, ie, $Z(G)=e$.

Por ejemplo:

$$Z(D_8)=\{Id, 180°\} \qquad Z(D_6)=\{Id\}$$

$$|Z(D_8)|=2 \qquad |Z(D_6)|=1$$

Lema: Sea $X\subseteq G$ tal que $xy=yx$ para todo $x,y\in X$. Entonces $\langle X\rangle$ es abeliano.

Dem:

Por hipotesis $X\subseteq C_G(X)$. Como $C_G(X)$ es un subgrupo de G, $\langle X\rangle\subseteq C_G(X)$. Ent $X\subseteq C_G(\langle X\rangle)$ $\therefore$ $\langle X\rangle\subseteq C_G(\langle X\rangle)$. Por lo tanto $\langle X\rangle$ es abeliano.

Si tenemos un isomorfismo $\theta: G_1 \to G_2$, entonces $\theta(Z(G_1)) = Z(G_2)$.

$x \in Z(G_1)$ y $y \in G_2$, ent $\theta(x)y = \theta(x)\theta(x') = \theta(xx')$
$= \theta(x'x) = y\theta(x)$ $\therefore \theta(x) \in Z(G_2)$.

Sea $y \in Z(G_2)$, $y = \theta(x)$. Sea $u \in G_1$. $\theta(xu) = \theta(x)\theta(u)$
$= y\theta(u) = \theta(u)y = \theta(ux)$ $\therefore xu = ux$ ie, $x \in Z(G_1)$.

Cuando tenemos un isomorfismo $\theta: G \to G$, a θ se le llama **un automorfismo de G**

Entonces cualquier automorfismo de G manda al centro en el centro.

Def: Un subgrupo $H \leq G$ se dice que es **caracteristico en G** si $\theta(H) = H$ para todo automorfismo de G. Esto lo escribimos $H \operatorname{char} G$.

Una familia especial de automorfismos de un grupo son los llamados **automorfismos interiores**.

Un automorfismo interior de G es un automorfismo θ_g inducido por un elemento $g \in G$ de la siguiente manera: $\theta_g(x) = g^{-1}xg$.

$$\theta_g(xy) = g^{-1}xyg = (g^{-1}xg)g^{-1}yg = \theta_g(x)\theta_g(y)$$

$\theta_g^{-1}(x) = gxg^{-1}$. Por lo tanto tenemos un automorfismo.

Al elemento $x^g = g^{-1}xg$ se llama el conjugado de x respecto a g. Notemos que si $x \in Z(G)$, entonces $x^g = x$, es decir, $\theta_g(x) = x$ para toda $g \in G$.

Por lo tanto si G es abeliano <u>sólo</u> hay un automorfismo interior, la identidad.

x^g $\quad \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G) \leq S_G$ $\quad H^g$

Dado un grupo G, tenemos tres grupos de permutaciones

S_G, $Aut(G)=\{\theta: G\to G \mid \theta \text{ es automorfismo}\}$

$Inn(G)=\{\theta\in Aut(G) \mid \theta \text{ es interior}\}$.

$$Inn(G)\leq Aut(G)\leq S_G$$

Si tenemos un automorfismo $\theta: G\to G$ y $H\leq G$ no es difícil ver que $\theta(H)\leq G$. Entonces nos podemos preguntar por $H^g=\theta_g(H)$. y cuándo pasa que $H=H^g=\{g^{-1}hg \mid h\in H\}$.