Otro ejemplo es la accion trivial. Si $\Omega \neq \emptyset$ y G es un grupo, definimos $g \cdot \alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in \Omega$ y $\forall g \in G$.

Por otro lado también tenemos que G actua en si mismo. La acción regular de G en G está dada por el producto de G, es decir, $g \cdot x = gx$. Otra accion importante de G en G es la conjugación. Dado $x \in G$ y $g \in G$, se tiene la acción $g \cdot x = x^g = g^{-1} x g$.

También usando el producto de G tenemos que si $\Omega = \{ X / X \subseteq G \}$ entonces G actua en Ω : $g \cdot X = gX$. Un caso particular es tomar $\Omega = \{ xH / x \in G \}$ el conjunto de clases laterales izq. de $H \leq G$. Entonces $g \cdot (xH) = gxH$.

Def: Sea G un grupo actuando en un conjunto Ω. Decimos que la acción es fiel si $g \cdot \alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in \Omega$ implica que $\alpha = e$. Se define el kernel de la acción como el conjunto de todos los elementos $g\in G$ tales que $g\cdot\alpha=\alpha$ $\forall\alpha\in\Omega$.

Lema: Sup. G actua en Ω. Para cada $g\in G$ definimos $\rho_g:\Omega\longrightarrow\Omega$ como $\rho_g(\alpha)=g\cdot\alpha$. Entonces $\rho_g\in S_\Omega$ y la función $\theta:G\longrightarrow S_\Omega$ definida como $\theta(g)=\rho_g$ es un homomorfismo tal que $\operatorname{Ker}\theta$ es igual al kernel de la acción.

Dem:

Sean $g,h\in G$ y $\alpha\in\Omega$. Entonces $\rho_h\rho_g(\alpha)=\rho_h(g\cdot\alpha)=h\cdot(g\cdot\alpha)=(hg)\cdot\alpha=\rho_{hg}(\alpha)$. Por lo tanto $\rho_h\rho_g=\rho_{hg}$. Notemos que $\rho_e(\alpha)=e\cdot\alpha=\alpha$, así que $\rho_e=Id_\Omega$. También, por lo primero $\rho_g\rho_{g^{-1}}=\rho_e=\rho_{g^{-1}}\rho_g$. Por lo tanto $\rho_g\in S_\Omega$ para todo $g\in G$. Ahora, $\theta(h)\theta(g)=\rho_h\rho_g=\rho_{hg}=\theta(hg)$ así que θ es un homomorfismo. Por otro lado, un elemento $g\in G$, $g\in\operatorname{Ker}\theta\Leftrightarrow\theta(g)=Id_\Omega\Leftrightarrow\rho_g=Id_\Omega\Leftrightarrow\rho_g(\alpha)=\alpha$ $\forall\alpha\in\Omega\Leftrightarrow g\cdot\alpha=\alpha$ $\forall\alpha\in\Omega$, ie, g está en el kernel de la acción.

Cor. Sup que G actua en Ω y K el kernel de la acción. Entonces $K \trianglelefteq G$ y G/K es isomorfo a un subgrupo de S_Ω.

Dem:

Por el lema anterior hay un homomorfismo $\theta: G \longrightarrow S_\Omega$ tal que $K = \ker\theta \trianglelefteq G$. Por el 1er Teorema de Isomorfismo $G/K \cong \theta(G) \leq S_\Omega$.

Def: Se dice que un grupo G es simple si sus unicos subgrupos normales son e y G.

Teorema:

Sea $H \leq G$ con $[G:H] = n < \infty$. Entonces existe un subgrupo $N \trianglelefteq G$ tal que:

i) $N \subseteq H$ y

ii) $[G:N] \mid n!$

En particular, si $n > 1$ y $|G|$ no divide a $n!$, entonces G no es simple.