Algunas aplicaciones de los Teoremas de Sylow

Teorema.

Sea $|G|=pq$ con $p>q$ primos. Entonces G tiene un p-subgrupo de Sylow normal. Más aún, si G no es abeliano, entonces $q \mid (p-1)$ y G tiene exactamente p q-subgrupos de Sylow.

Dem:

Por un corolario anterior $n_p(G)=1$ ó q y por el teorema de conteo de Sylow $n_p(G)\equiv 1$ mod p. Como $1<q<p$, $q \not\equiv 1 \mod p$ así que $n_p(G)=1$. Por lo tanto G tiene un p-subgrupo de Sylow normal $P \triangleleft G$

Como G/P es un grupo de orden primo q, G/P es abeliano. Así $G' \subseteq P$ (el conmutador)

Similarmente, si G tuviera un q-subgrupo normal Q de Sylow, entonces $G' \subseteq Q$ y así $G' \subseteq P \cap Q = e$ y esto implicaria que G es abeliano. Entonces, si G no es abeliano debe pasar que $n_q(G)>1$ y así $n_q(G)=p$. Esto implica que $p\equiv 1 \mod q$, es decir, $q \mid p-1$.

Cor. Para cada elección de primos $p>q$, existe un único grupo abeliano, salvo isomorfismo, de orden pq.

Dem:

Dados $p>q$, siempre podemos concíderar el grupo cíclico de orden pq. Sea G abeliano con $|G|=pq$. Entonces G tiene subgrupos de Sylow normales (y por tanto unicos) P y Q de orden p y q respectivamente. Si $x\in G$ con $\mathcal{O}(x)=p$, entonces $\langle x\rangle=P$ y así $x\in P$. De la misma forma, si $x\in G$ y $\mathcal{O}(x)=q$ entonces $\langle x\rangle = Q$ y así $x\in Q$. Como $P\cup Q<G$, existe un elemento $x\in G$ con $x\notin P$ y $x\notin Q$. Esto implica que $\mathcal{O}(x)=pq$ y por lo tanto $\langle x\rangle=G$.

Sea $|G|=p^2q$ donde p y q son primos. Entonces G tiene un p-subgrupo de Sylow normal o un q-subgrupo de Sylow normal.

Dem:

Si $n_q(G)=1$, ya terminamos. Supongamos $n_q(G)>1$, entonces $n_q(G)\in\{p,p^2\}$.

Supongamos primero que $n_q(G)=p$. Entonces $p\equiv 1 \mod q$ y en particular $p>q$. Así $q\not\equiv 1 \mod p$ y no podemos tener $n_p(G)=q$. Por lo tanto $n_p(G)=1$.

Ahora consideremos el caso $n_q(G)=p^2$. Si $Q_1, Q_2 \in Syl_q(G)$ son distintos, entonces $Q_1\cap Q_2=e$ porque ambos son de orden q. Así que los q-subgrupos de Sylow no comparten ningun elemento distinto del neutro. Como hay p^2 q-subgrupos de Sylow distintos cada uno con $q-1$ elementos distintos del neutro, esto nos da $p^2(q-1)$ elementos de G.

Sea X el conjunto de elementos incluido el neutro aún sin contar. Entonces

$|X| = |G| - p^2(q-1) = p^2q - p^2(q-1) = p^2(q-q+1) = p^2$, y cada elemento de orden distinto de q está en X.

Sea $S \in Syl_p(G)$. Como ningún elemento de S tiene orden q, $S \subseteq X$. Como $|S| = p^2 = |X|$, $S = X$. Por lo tanto S es único y normal.