c) $\Rightarrow$ d) Sea $\sigma \in Aut(G)$. Entonces $\sigma(S) \leq G$ y $|\sigma(S)| = |S|$, en particular, $\sigma(S)$ es un p-subgrupo de G. Por c), $\sigma(S) \subseteq S$. Por lo tanto S char G.

d) $\Rightarrow$ a) Todo subgrupo característico es normal.

Vamos a denotar a la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G como $n_p(G) = |Syl_p(G)|$. Por un corolario anterior, si $|G| = p^\ell m$, entonces $n_p(G)$ tiene que dividir a m. Por ejemplo, si $|G| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, entonces $n_3(G)$, que es el número de subgrupos de orden 9 de G, es necesariamente uno de los números, 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20 ó 40.

Lema. Sea G un grupo finito y $S \in Syl_p(G)$. Supongamos que P es un p-subgrupo de $N_G(S)$. Entonces $P \subseteq S$.

Dem:

Como S es un p-subgrupo de Sylow de G y $S \subseteq N_G(S)$, se tiene que $S \in Syl_p(N_G(S))$ por

Lagrange. Sin embargo $S \trianglelefteq N_G(S)$, así que por el corolario anterior aplicado a $N_G(S)$, $P \subseteq S$.

Teorema (Sylow Conteo).

Sea G un grupo finito y $n_p(G) = |Syl_p(G)|$. Entonces $n_p(G) \equiv 1 \mod p$. De hecho $n_p(G) \equiv 1 \mod p^m$ si $p^m \leq [S : S \cap T]$ para todo $S, T \in Syl_p(G)$ con $S \neq T$.

Dem:

Sea $P \in Syl_p(G)$. Como conjugados de p-subgrupos de Sylow, son p-subgrupos de Sylow P actua en $Syl_p(G)$ por conjugación. Notemos que, bajo esta acción P es su estabilizador así que $\{P\}$ es una orbita de esta acción.

Si esta acción, no tiene más orbitas $n_p(G) = 1$ y ya no hay más qué probar.

Sup $S \in Syl_p(G)$ con $S \neq P$. Sea $\mathcal{O}$ la orbita que contiene a S. Entonces $|\mathcal{O}| = [P : N_p(S)]$ por FCP. Por el lema anterior, $N_p(S) \subseteq S$. Se sigue que $N_p(S) = P \cap S$. Por lo tanto $|\mathcal{O}| = [P : P\cap S]$.

Si p^m es como en el enunciado, entonces $p^m \leq [P : P\cap S]$. Como este índice es una potencia de p, concluimos que $p^m \mid [P : S\cap P]$. Entonces, p^m divide al tamaño de toda orbita distinta de $\{P\}$. Así $p^\ell \mid n_p(G)-1$, ie, $n_p(G) \equiv 1 \mod p^\ell$.

En particular, como $P \nsubseteq S$, $[P : P\cap S] > 1$ así que $[P : P\cap S] \geq P$. Entoces podemos tomar $m=1$ y se tiene que $n_p(G) \equiv 1 \mod p$.

Si tenemos $|G| = 360$, las unicas posibilidades para $n_3(G)$ son $1, 4, 10$ y 40. Como 4 y 40 <u>no</u> son congruentes con 1 módulo 9, la segunda conclución del Teorema, nos dice que si $n_3(G) \in \{4, 40\}$, entonces existen $S, T \in Syl_3(G)$ distintos tales que $[S : S\cap T] < 9$. En particular, en este caso $S\cap T \neq e$ y los distintos 3-subgrupos de Sylow de G no se intersectan trivialmente.