Cor. Sea $N \subseteq M \triangleleft G$ con $N \triangleleft G$. Entonces $G/M \cong {}^{G/N}\!/_{M/N}$.

Dem:

Aplicando el teorema de la correspondencia a $\pi: G \longrightarrow G/N$, tenemos que

$M \triangleleft G \iff \pi(M) \triangleleft \pi(G) \iff M/N \triangleleft G/N$ y se respetan los cocientes, es decir,

$G/M \cong {}^{G/N}\!/_{M/N}$.

## Conmutadores

Def: Sean $x, y \in G$. El conmutador de $x, y$ es el elemento $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Def: El subgrupo de $G$ generado por todos los conmutadores de $G$ se le llama el subgrupo conmutador ó el subgrupo derivado de $G$ y se denota $G' = [G:G]$.

Lema: Sea $G$ un grupo y $x, y \in G$.

i) $x$ y $y$ conmutan si y solo si $[x,y]=e$.

ii) $[x,y][y,x]=e$

iii) $\varphi(G')\subseteq H'$ para todo $\varphi: G\to H$. En particular $G'$ char $G$ y $G'\trianglelefteq G$.

iv) $G$ es abeliano si y solo si $G'=e$.

Dem:

i) $xy=yx \iff x^{-1}y^{-1}xy=e \iff [x,y]=e$.

iv) $G$ es abeliano $\iff [x,y]=e \ \forall x,y\in G \iff G'=e$

ii) $[x,y][y,x]=(x^{-1}y^{-1}xy)(y^{-1}x^{-1}yx)= (yx)^{-1}xy\,(xy)^{-1}yx=e$.

iii) Sea $\varphi: G\to H$ un homomorfismo. Entonces $\varphi([x,y])=\varphi(x^{-1}y^{-1}xy)=\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}\varphi(x)\varphi(y)$
$=[\varphi(x),\varphi(y)]$. Por lo tanto $\varphi(G')\subseteq H'$. Si $\varphi: G\to G$ es un automorfismo, entonces
$G'=\varphi(\varphi^{-1}(G'))\subseteq\varphi(G')$ $\therefore \varphi(G')=G'$.

Teorema:

Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces $G/N$ es abeliano si y solo si $G' \subseteq N$.

Dem:

Consideremos $\pi: G \to G/N$. Por (iv) del lema anterior, $G/N$ es abeliano $\Leftrightarrow (G/N)' = e$ $\Leftrightarrow [\pi(x), \pi(y)] = e = \pi([x,y]) \; \forall x,y \in G \Leftrightarrow [x,y] \in \operatorname{Ker}\pi = N \; \forall x,y \in G \Leftrightarrow G' \subseteq N$.

Cor. Sea $\varphi: G \to A$ un homomorfismo con $A$ abeliano. Entonces $G' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

Dem:

Por el 1$^{er}$ Teo de isomorfismo, $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \varphi(G) \subseteq A$. Entonces $G/\operatorname{Ker}\varphi$ es abeliano. Por el teorema anterior $G' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

Cor. Si $G' \subseteq H \leq G$, entonces $H \trianglelefteq G$.

Dem:

Por el teo anterior, $G/G'$ es abeliano. Entonces $H/G' \trianglelefteq G/G'$. Por el teorema de la correspondencia aplicado a $\pi: G \longrightarrow G/G'$, tenemos que $H \triangleleft G$.

## Acciones de Grupos

Def: Sea $G$ un grupo y $\Omega$ un conjunto no vacío. Decimos que $G$ actua en $\Omega$ por la izquierda si existe una funcion $G \times \Omega \xrightarrow{\cdot} \Omega$ tal que:

i) $e \cdot \alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in \Omega$ y

ii) $h \cdot (g \cdot \alpha) = (hg) \cdot \alpha$ $\forall \alpha \in \Omega$ y $\forall g, h \in G$.

Ejemplo:

El ejemplo canónico de accion de un grupo son los grupos de permutaciones.

Si $G \leq S_\Omega$ para algun conjunto $\Omega$, entonces dados $g \in G$ y $\alpha \in \Omega$ la accion está dada por la evaluacion, ie, $g \cdot \alpha = g(\alpha) \in \Omega$.