volvemos al caso anterior ⚠. Así que lo unico que queda es que N sea un 2-grupo $(|N| = 2$ ó $4)$. Si $|N| = 4$, N es el unico 2-subgrupo de Sylow de A_5 y así contiene a los 15 elementos de orden 2 ⚠. Entonces tenemos el caso $|N| = 2$. Sea $x \in N$ de orden 2. Entonces $N = \{Id, x\}$ y x fija a algún indice $\alpha \in \{1,2,3,4,5\}$. Entonces N está contenido en el estabilizador de α, A_{5_α}. Por el lema anterior y como $N \triangleleft A_5$, N está contenido en todos los estabilizadores. Esto es una contradiccion ya que x no fija todos los puntos. Por lo tanto $|N| = 1$.

Ahora usaremos inducción sobre n para probar que A_n es simple con $n \geq 6$. Supongamos que $N \triangleleft A_n$ y que A_{n-1} es simple. Sea H el estabilizador de algun $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces $H \cong A_{n-1}$ y por tanto simple. Como

$H \cap N \triangleleft H$, $H \cap N = Id$ ó $H \cap N = H$. Si $H \cap N = H$, entonces $H \subseteq N$.
Como $N \triangleleft A_n$, $gHg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in A_n$. Por el lema anterior, N contiene a todos los estabilizadores, se sigue que N contiene a todo elemento de A_n que fija a algun punto de $\{1, 2, \dots, n\}$. En particular, N contiene a todos los 3-ciclos. Por lo tanto, $N = A_n$.

Sabemos que Id es el único elemento de N que fija a todos los puntos.
Si $|N| > 1$, sea $Id \neq x \in N$. Entonces la estructura ciclica de x contiene un m-ciclo con $m \geq 3$ ó es un producto solo de 2-ciclos. Renumerando los puntos, x tiene la forma $(1\,2)(3\,4)\cdots$ o $(1\,2\,3\,\cdots)\cdots$. Sea $y = (3\,5\,6)\,x\,(3\,6\,5) \in N$.
Entonces $y = (1\,2)(5\,4)\cdots$ o $(1\,2\,5\,\cdots)\cdots$ En cualquiera de los casos $x \neq y$ y $y^{-1}x$ fija a 1. Como $y^{-1}x \in N$, tenemos una contradicción.

Cor. Para $n \geq 5$, los unicos subgrupos normales de S_n son $\{Id\}$, A_n y S_n.

Dem.

Sea $N \trianglelefteq S_n$. Entonces $N \cap A_n \trianglelefteq A_n$, así que $N \cap A_n = Id$ ó $A_n \cap N = A_n$.

Si $A_n \cap N = A_n$, entonces $A_n \subseteq N \subseteq S_n$. Como A_n tiene indice 2, $N = A_n$ ó $N = S_n$.

Si $N \cap A_n = Id$, entonces $|A_n N| = |A_n||N| = \frac{n!}{2}|N| \leq n!$. Así que $|N| \leq 2$

Si $|N| = 2$, entonces $N \subseteq Z(S_n) = \{Id\}$ ∇ $\therefore N = \{Id\}$.

Ejemplo. Si $|G| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, entonces G no es simple.

Supongamos que G es simple. Entonces $n_5(G) \equiv 1 \mod 5$ y $n_5(G) \mid 24$. Así que $n_5(G) = 6$. Entonces hay una copia de $G \hookrightarrow S_6$. Como $A_6 \trianglelefteq S_6$, $G \cap A_6 \trianglelefteq G$ por lo tanto $G \cap A_6 = G$ y así $G \subseteq A_6$. Sin embargo $[A_6 : G] = 3$

lo que implica que $G \triangleleft A_6$ ¡!.

Lema: Supongamos que G actua en un conjunto finito Ω y supongamos que hay un $g \in G$ que induce una permutación impar en Ω. Entonces existe $A \triangleleft G$ con $[G:A]=2$ y $g \notin A$.

Dem:

Hay un homomorfismo $\theta: G \longrightarrow S_\Omega$ (inducido por la acción) tal que $\theta(g) \notin A_\Omega$. La composion de θ con la proyección canónica $\pi: S_\Omega \longrightarrow S_\Omega/A_\Omega$ da un homomorfismo de G en un grupo de orden 2. Notemos que $g \notin \operatorname{Ker} \pi\theta$ y por el 1$^{\text{er}}$ Teorema de isomorfismo $|G/\operatorname{Ker} \pi\theta| = 2$. Por lo tanto $A = \operatorname{Ker} \pi\theta \trianglelefteq G$.

Cor. Sea $|G| = 2m$ con m impar. Entonces G tiene un subgrupo normal de orden m. En particular, si $m > 1$, entonces G no es simple.

Dem:

Por el Teorema de Cauchy, sea $g \in G$ de orden 2. Tenemos la acción de G en G dada por multiplicar por la izquierda, ie, $h \cdot x = hx$ con $h, x \in G$.

Como $g \neq e$, g no fija a ningún elemento de G. Como $g^2 = e$, la estructura cíclica de la permutación inducida por g consiste solo de 2-ciclos y 1-ciclos pero como no hay puntos fijos, consiste solo de 2-ciclos. Por lo tanto esta permutación es un producto de m transposiciones y entonces es impar. Por el lema anterior tenemos el resultado.