Def. Sea G un grupo finito y p un número primo. Un p-subgrupo de Sylow de G es un subgrupo $P \leq G$ tal que $|P| = p^\ell$ es la mayor potencia de p que divide a $|G|$. El conjunto de todos los p-subgrupos de Sylow de G lo denotamos $Syl_p(G)$.

Obs. Dado un grupo finito G, $Syl_p(G) \neq \emptyset$ para todo primo p.

Teorema (Cauchy)

Sea G un grupo finito y p un divisor primo de $|G|$. Entonces G tiene un elemento de orden p.

Dem:

Sea $P \in Syl_p(G)$. Como $p \mid |G|$, $|P| > 1$ y así podemos escoger $e \neq x \in P$. Entonces $\mathcal{O}(x) = p^t$ con $t \geq 1$. Así $x^{p^{t-1}}$ tiene orden p.

Teorema

Sea G un grupo finito, $P \leq G$ un p-subgrupo y $S \in Syl_p(G)$. Entonces $P \leq S^x$ para algun $x \in G$.

Dem:

Sea $\Omega = \{xS / x \in G\}$ y tomemos la acción de P en Ω dada por multiplicar por la izq. Tenemos que $|\Omega| = [G:S]$ y como S es un p-subgrupo de Sylow, $p \nmid |\Omega|$. Por otro lado, dada una orbita $\mathcal{O}$ tenemos que $|\mathcal{O}| = [P:H]$ para un subgrupo $H \leq P$ por el FCP. Como P es un p-grupo, $|\mathcal{O}| = 1$ o es divisible por p. Ya que $p \nmid |\Omega|$ entonces debe de haber una orbita de tamaño 1, es decir, existe xS tal que $y \cdot xS = yxS = xS$ $\forall y \in P$. Si $y \in P$, entonces $S^{x^{-1}} = xSx^{-1} = yxSx^{-1} = yS^{x^{-1}}$ y así $y \in S^{x^{-1}}$. Por lo tanto $P \leq S^{x^{-1}}$.

Teorema (Sylow D)

Sea G un grupo finito y sea $P \leq G$ un p-subgrupo. Entonces existe $S \in Syl_p(G)$ tal que $P \subseteq S$.

Dem:

Solo tenemos que notar que si $S \in Syl_p(G)$, entonces $g^{-1}Sg$ es también un p-subgrupo de Sylow de G $\forall g \in G$ ya que $|S| = |g^{-1}Sg|$.

Teorema (Sylow C)

Sea G un grupo finito. Entonces el conjunto $Syl_p(G)$ es una sola clase de conjugación de subgrupos de G.

Dem:

Sean P y S p-subgrupos de Sylow de G. Por el Teorema anterior existe $x \in G$ tal que $P \subseteq S^x$. Como $|P| = |S| = |S^x|$, $P = S^x$.

Cor. Sea G un grupo finito y $P \in Syl_p(G)$. Entonces $|Syl_p(G)| = [G : N_G(P)]$, y en particular, este número divide a $[G:P]$.

Dem:

Solo hay que usar FCP con la accion de conjugacion de G en sus subgrupos.

Cor. Sea G un grupo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes para $S \in Syl_p(G)$.

a) $S \trianglelefteq G$

b) S es el único p-subgrupo de Sylow de G.

c) Todo p-subgrupo de G está contenido en S.

d) S es característico en G.

Dem:

a) $\Rightarrow$ b) Si $S \trianglelefteq G$, entonces $G = N_G(S)$. Por lo tanto $|Syl_p(G)| = [G : N_G(S)] = 1$.

b) $\Rightarrow$ c) Se sigue del Teorema D.