Dem:

Por el lema anterior $C(g) = C(t_1 \cdots t_k) \geq C(Id) - k = |X| - k$.

Como g es un m-ciclo, $C(g) = |X| - m + 1$. Por lo tanto $k \geq m-1$.

Prop. El grupo S_X es generado por las $n-1$ transposiciones $(1\ 2)$, $(2\ 3), \ldots, (n-1\ n)$.

Dem:

Solo tenemos que ver que toda transposición es generada por las transposiciones de arriba. Sea $(i\ j)$ una transposicion en S_n. Podemos asumir que $j \geq i+2$.

Entonces $(i\ i+1)^{(i+1\ i+2)} = (i+1\ i+2)(i\ i+1)(i+1\ i+2) = (i\ i+2)$.

Ahora, $(i\ i+2)^{(i+2\ i+3)} = (i\ i+3)$. Por lo tanto $(i\ i+1)^{(i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-1\ j)} = (i\ j)$.

Lema. Supongamos que G actua transitivamente en Ω. Entonces los estabilizadores G_α con $\alpha \in \Omega$ forman una clase de conjugación de subgrupos de G.

Dem:

Sea $\alpha \in \Omega$ y $g \in G$. Afirmamos que $g G_\alpha g^{-1} = G_\beta$ con $\beta = g \cdot \alpha$. Para esto hay que ver que $x \in G$ fija a $\alpha \Leftrightarrow g x g^{-1}$ fija a β. Tenemos que $g x g^{-1} \cdot \beta = g x g^{-1} \cdot (g \cdot \alpha) = g x \cdot \alpha = g \cdot (x \cdot \alpha)$ y esto es igual a $\beta = g \cdot \alpha$ si y solo si $x \cdot \alpha = \alpha$.

Se sigue que el conjugado de un estabilizador tambien es un estabilizador.

Ahora si tenemos G_α y G_β con $\alpha, \beta \in \Omega$, como la acción es transitiva existe g tal que $\beta = g \cdot \alpha$. Por lo anterior $G_\beta = g G_\alpha g^{-1}$.

Teorema.

El grupo alternante A_n es simple para $n \geq 5$.

Dem.

Empecemos con el caso $n=5$. La estructura cíclica de los elementos en A_5 son 1^5, $1 \cdot 2^2$, $1^2 \cdot 3$ y 5, y el número de elementos con estas estructuras cíclicas son 1, 15, 20 y 24. Sea $N \triangleleft A_5$ un subgrupo normal propio. Tenemos que $|A_5| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Supongamos que $3 \mid |N|$, entonces N contiene un 3-subgrupo de Sylow de A_5 y por el C-Teorema de Sylow, N contiene a todos los 3-subgrupos de Sylow de A_5. En particular N contiene a todos los 3-ciclos. Por lo tanto $A_5 \subseteq N$ ¡!.

Ahora, si $5 \mid |N|$, entonces N contiene todos los 5-subgrupos de Sylow de A_5, así que $|N| > 24$. Como $|N| \mid 60$, $|N| = 30$. Pero entonces $3 \mid |N|$ y volvemos al caso anterior $\underset{\circ}{\nabla}$. Así que lo unico que queda es que N sea un 2-grupo ($|N|=2$ ó 4). Si $|N|=4$, N es el unico 2-subgrupo de Sylow de A_5 y así contiene a los 15 elementos de orden 2 $\underset{\circ}{\nabla}$. Entonces tenemos el caso $|N|=2$. Sea $x\in N$ de orden 2. Entonces $N=\{Id, x\}$ y x fija a algún indice $\alpha\in\{1,2,3,4,5\}$. Entonces N está contenido en el estabilizador de α, A_{5_α}. Por el lema anterior y como $N \triangleleft A_5$, N está contenido en todos los estabilizadores. Esto es una contradiccion ya que x no fija todos los puntos. Por lo tanto $|N|=1$.

Ahora usaremos inducción sobre n para probar que A_n es simple con $n\geq 6$. Supongamos que $N\triangleleft A_n$ y que A_{n-1} es simple. Sea H el estabilizador de algun $\alpha\in\{1,2,\dots,n\}$. Entonces $H\cong A_{n-1}$ y por tanto simple. Como