Cor. Sean $H, N \leq G$ tales que $[G : H\cap N] < \infty$. Entonces $[HN : N] = [H : H\cap N]$ y $[HN : H] = [N : N\cap H]$.

$$\begin{tikzcd}
 & HN \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & H\cap N &
\end{tikzcd}$$

Teorema de la correspondencia.

Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo y sea $N = \operatorname{Ker} \varphi$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} = \{ U \leq G \mid N \subseteq U \} \arrow[r, bend left, "\varphi(\ )"] & \mathcal{T} = \{ V \mid V \leq H \} \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}(\ )"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $\varphi(\,)$ y $\varphi^{-1}(\ )$ son biyecciones, una inversa de la otra, entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$. Más aún, estas funciones respetan contención, indices, normalidad y subgrupos cocientes.

Es decir, si $\varphi(\mathcal{U}_1)=V_1$, $\varphi(\mathcal{U}_2)=V_2$, $\mathcal{U}_1=\varphi^{-1}(V_1)$ y $\mathcal{U}_2=\varphi^{-1}(V_2)$ entonces

$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ y en este caso $[\mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1]=[V_2 : V_1]$; tambien $\mathcal{U}_1 \trianglelefteq \mathcal{U}_2 \Leftrightarrow V_1 \trianglelefteq V_2$ y en este caso $\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1 \cong V_1/V_2$.

Dem:

Por un lema anterior, $\varphi(\ )$ y $\varphi^{-1}(\ )$ sí definen funciones entre los conjuntos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{U}\in\mathcal{S}$. Por la definición de $\varphi^{-1}(\ )$, tenemos que $\mathcal{U}\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))$. Ahora sea $g\in\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))$ ie, $\varphi(g)\in\varphi(\mathcal{U})$. Por un lema anterior, $gN=uN$ p.a. $u\in\mathcal{U}$. Así que $g\in uN\subseteq\mathcal{U}$ ya que $N\subseteq\mathcal{U}$. $\therefore \mathcal{U}=\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))$.

Sea $V\in\mathcal{T}$. Entonces $\varphi(\varphi^{-1}(V))\subseteq V$. Sea $v\in V$. Como φ es supayectiva, existe $g\in G$ tal que $\varphi(g)=v$. Entonces $g\in\varphi^{-1}(V)$ y así $v=\varphi(g)\in\varphi(\varphi^{-1}(V))$. $\therefore V=\varphi(\varphi^{-1}(V))$.

Por lo tanto $\varphi(\ )$ y $\varphi^{-1}(\ )$ son inversa una de la otra.

:

Es claro que $\varphi(\ )$ y $\varphi^{-1}(\ )$ respetan la contención. Supongamos que $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2 \in \mathcal{S}$ y sean $V_1 = \varphi(\mathcal{U}_1)$ y $V_2 = \varphi(\mathcal{U}_2)$ en $\mathcal{T}$. Queremos ver que $[\mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1] = [V_2 : V_1]$.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{U}_1 x \mid x \in \mathcal{U}_2\} &\xrightarrow{\hat{\varphi}} \{V_1 z \mid z \in V_2\}. \\ \mathcal{U}_1 x &\longmapsto \varphi(\mathcal{U}_1 x) = V_1 \varphi(x) \end{aligned}$$

Sea $z \in V_2$. Entonces $z = \varphi(x)$ p.a. $x \in \mathcal{U}_2$

y así $\varphi(\mathcal{U}_1 x) = V_1 \varphi(x) = V_1 z$, es decir, $\hat{\varphi}$ es suprayectiva. Ahora, $\hat{\varphi}(\mathcal{U}_1 x) = \hat{\varphi}(\mathcal{U}_1 y) \iff$ $V_1 \varphi(x) = V_1 \varphi(y) \iff \varphi(y)^{-1}\varphi(x) \in V_1 \iff \varphi(y^{-1}x) \in \varphi(\mathcal{U}_1) \iff y^{-1}x \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}_1)) = \mathcal{U}_1 \iff \mathcal{U}_1 x = \mathcal{U}_1 y$.

$\therefore\ \hat{\varphi}$ es iny. y entonces $[\mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1] = [V_2 : V_1]$.

Ahora supongamos que $\mathcal{U}_1 \trianglelefteq \mathcal{U}_2 \in \mathcal{S}$. Sea $x \in \mathcal{U}_2$. Entonces $x^{-1}\mathcal{U}_1 x = \mathcal{U}_1$. Esto implica que $\varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(x^{-1}\mathcal{U}_1 x) = \varphi(x)^{-1}\varphi(\mathcal{U}_1)\varphi(x)$ $\therefore\ \varphi(\mathcal{U}_1) \trianglelefteq \varphi(\mathcal{U}_2)$. Recíprocamente, si $\varphi(\mathcal{U}_1) \trianglelefteq \varphi(\mathcal{U}_2)$ dado $x \in \mathcal{U}_2$, se tiene que $\varphi(x^{-1}\mathcal{U}_1 x) = \varphi(x)^{-1}\varphi(\mathcal{U}_1)\varphi(x) = \varphi(\mathcal{U}_1)$. Por otro lado $x^{-1}\mathcal{U}x \in \mathcal{S}$ y como $\varphi(\ )$ es inyectiva, $x^{-1}\mathcal{U}_1 x = \mathcal{U}_1$ $\therefore\ \mathcal{U}_1 \trianglelefteq \mathcal{U}_2$

Consideremos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{S}$ con $\mathcal{U}_1 \trianglelefteq \mathcal{U}_2$ y $V_1 = \varphi(\mathcal{U}_1)$ y $V_2 = \varphi(\mathcal{U}_2)$. Queremos demostrar que $\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1 \cong V_2/V_1$. Sea $\varphi' = \varphi|_{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_2$ y $\pi : V_2 \longrightarrow V_2/V_1$ la proyección canónica. Sea $\theta = \pi\varphi'$. Entonces θ es un homomorfismo y $\theta(\mathcal{U}_2) = \pi\varphi'(\mathcal{U}_2) = \pi(V_2) = V_2/V_1$. Por lo tanto θ es suprayectiva. Notemos que $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Ker}\pi\varphi' = \varphi'^{-1}(\operatorname{Ker}\pi) = \varphi'^{-1}(V_1) = \mathcal{U}_1$.

Por el 1er Teo de iso, $\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1 \cong V_1/V_2$.

Cor. Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces todo subgrupo de G/N tiene la forma H/N para un único subgrupo $H \leq G$ con $N \subseteq H$.

Dem:

Aplicamos el teorema anterior a la proyeccion canonica $\pi : G \to G/N$. Entonces, si $K \leq G/N$, entonces $K = \pi(\pi^{-1}(K)) = \dfrac{\pi\varphi^{-1}(K)}{N} = \dfrac{\pi^{-1}(K)}{N}$ ya que $N \leq \pi^{-1}(K)$.

Cor. Sea $N \subseteq M \trianglelefteq G$ con $N \trianglelefteq G$. Entonces $G/M \cong {}^{G/N}\!/_{M/N}$.

Dem:

Aplicando el teorema de la correspondencia a $\pi : G \longrightarrow G/N$, tenemos que

$M \trianglelefteq G \Leftrightarrow \pi(M) \trianglelefteq \pi(G) \Leftrightarrow M/N \trianglelefteq G/N$ y se respetan los cocientes, es decir,

$G/M \cong {}^{G/N}\!/_{M/N}$.

Conmutadores

Def: Sean $x, y \in G$. El conmutador de x, y es el elemento $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Def: El subgrupo de G generado por todos los conmutadores de G se le llama el subgrupo conmutador ó el subgrupo derivado de G y se denota $G' = [G:G]$.

Lema: Sea G un grupo y $x, y \in G$.