Cor. Sea $\mathcal{H}$ una colección de subgrupos de subgrupos de un grupo G y sea $D = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$. Entonces D es un subgrupo de G.

Dem:
Como cada $H \in \mathcal{H}$ es un subgrupo, $e \in H$ $\forall H \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $D \neq \emptyset$ $(e \in D)$. Sean $x, y \in D$. Entonces $x, y \in H$ $\forall H \in \mathcal{H}$. Por el lema anterior, $xy^{-1} \in H$ para todo H en $\mathcal{H}$. Por lo tanto $xy^{-1} \in D$. Por el Lema D es un subgrupo de G

Dado un subconjunto $X \subseteq G$ de un grupo G podemos considerar la familia $\mathcal{H}$ de todos los subgrupos de G que contienen a X. Por el corolario anterior

$$\langle X\rangle = \bigcap_{\substack{X\subseteq H\\ H\leq G}} H$$ es un subgrupo de G. A este subgrupo se le llama el subgrupo generado por el subconjunto X. El subgrupo $\langle X\rangle$ se caracteriza por las siguientes dos propiedades:

(1) $X \subseteq \langle X\rangle$

(2) Si $K\leq G$ tal que $X\subseteq K$, entonces $\langle X\rangle \subseteq K$

El subgrupo $\langle X\rangle$ es el menor subgrupo de G que contiene a X.

Por ejemplo: $\langle \emptyset\rangle = \{e\} = e$

Lema. Sea G un grupo y $X \subseteq G$ cualquier subconjunto. Entonces $\langle X \rangle$ es el conjunto de todos los productos finitos $u_1 u_2 \cdots u_n$ de elementos $u_i \in G$ ta que u_i o $u_i^{-1} \in X$.

Dem:

Sea S el conjunto de los productos finitos dados por el enunciado. Si $u \in X$, entonces $e = uu^{-1} \in S$

Si $u_1 u_2 \cdots u_n \in S$, entonces $(u_1 u_2 \cdots u_n)^{-1} = u_n^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1} \in S$

Es claro que S es cerrado bajo la multiplicación.

Por el lema anterior, S es un subgrupo de G.

Notemos que $X \subseteq S$, por lo tanto $\langle X \rangle \subseteq S$

Ahora, si $u \in X$, entonces $u^{-1} \in \langle X \rangle$. Como $\langle X \rangle$ es cerrado bajo la multiplicacion $S \subseteq \langle X \rangle$ ∎

Si nuestro conjunto X es finito, digamos $X=\{a,b,c\}$, entonces escribimos $\langle X\rangle=\langle a,b,c\rangle$.

Def: Un grupo G es llamado cíclico si existe $g\in G$ tal que $G=\langle g\rangle$.

Cor. Sea $g\in G$. Entonces $\langle g\rangle=\{g^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

$X=\{g\}$ $\qquad g\, g^{-1}\, \cancel{g^{-1}\, g}\, g = g^3 \qquad g^{-1} g^{-1} g^{-1} g = g^{-2}$

Lema: Sea $G=\langle g\rangle$ cíclico. Sea $H\leq G$ y sea $n\geq 1$ el menor natural tal que $g^n\in H$. Entonces

a) $g^m\in H$ si y solo si $n\mid m$.

b) $H=\langle g^n\rangle$

Unas observaciones: Si $o(g)=\infty$ y $H=e$

En cualquier otro caso, ya sea $o(g)<\infty$ ó $H\neq e$