Con todo lo anterior ya podemos contar el número de clases de conjugacion en S_n. Vamos a denotar el tipo de estructura ciclica de la siguiente forma:

$n_1^{l_1} n_2^{l_2} \cdots n_k^{l_k}$ denota una estructura ciclica en S_n donde l_i es el número de n_i-ciclos que aparecen en la descomposicion. Notemos que como los ciclos son disjuntos $n = \sum l_i n_i$.

Por ejemplo $u=(13)(2456)$ tiene un tipo de estructura $1^2 \cdot 2 \cdot 4$ en S_8

Entonces para contar el numero de clases de conjugación en S_n solo nos tenemos que fijar en los distintos tipos de estructuras ciclicas. Por ejemplo en S_5 tenemos las estructuras ciclicas:

1^5, $1^3 \cdot 2$, $1 \cdot 2^2$, $1^2\, 3$, $1 \cdot 4$, 5 y $2 \cdot 3$. Por lo tanto hay 7 clases de conjugación en S_n.

Cor. Si $n \geq 3$, entonces $Z(S_n) \neq Id$

Dem:

Sea $z \in Z(S_n)$, así que $gzg^{-1} = z$ $\forall g \in S_n$. Si $z \neq Id$, renumerando los puntos si es necesario, podemos escribir $z = (1, 2, \ldots)$. Tenemos que $(2\,3)z(2\,3) = (1\,3\ldots)$

Vemos que z lleva 1 a 2 pero $(2\,3)z(2\,3)$ lleva 1 a 3 ¡! $\therefore z = Id$.

A los 2-ciclos en S_n los llamaremos transposiciones.

Lema. Todo elemento en S_X es un producto de transposiciones, en particular un m-ciclo es un producto de m-1 transposiciones.

Dem:

Como toda permutación es un producto de ciclos disjuntos basta descomponer los ciclos en transposiciones. Notemos que $(\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_m) = (\alpha_1\,\alpha_m)(\alpha_1\,\alpha_{m-1})\cdots(\alpha_1\,\alpha_2)$.

Def: Decimos que una permutacion $g \in S_X$ es par si se puede escribir como un producto de un número par de transposiciones. Analogamente definimos una permutación impar.

Por el lema anterior, un m-ciclo es par si m es impar y es impar si m es par. Tambien toda permutacion es par o impar.

Vamos a definir dos funciones. Primero la función de estructura ciclica s.

Si tenemos $g \in S_n$ con estructura ciclica $1^{l_1} 2^{l_2} \cdots n^{l_n}$, definimos $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como $s(m) = l_m$.

Ahora para cada $g \in S_X$ definimos $c(g)$ como el número de $\langle g \rangle$-orbitas en que es particionado X. Así $c(Id) = |X|$ y en general $c(g) = \sum_{m>0} s(m)$.