i] Como $e\in\mathcal{U}$, $\varphi(e)\in\varphi(\mathcal{U})$. Sean $\varphi(x),\varphi(y)\in\varphi(\mathcal{U})$. Entonces $xy^{-1}\in\mathcal{U}$, así que $\varphi(x)\varphi(y)^{-1}=\varphi(xy^{-1})\in\varphi(\mathcal{U})$. $\therefore\ \varphi(\mathcal{U})\leq H$.

ii] Como $e\in V$ y $\varphi(k)=e\ \forall k\in \operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq\varphi^{-1}(V)$. Sean $x,y\in\varphi^{-1}(V)$ i.e. $\varphi(x),\varphi(y)\in V$. Entonces $\varphi(xy^{-1})=\varphi(x)\varphi(y)^{-1}\in V$, es decir, $xy^{-1}\in\varphi^{-1}(V)$. $\therefore\ \varphi^{-1}(V)\leq G$. ∎

Consideremos $N\trianglelefteq G$ y $\pi: G\longrightarrow G/N$. Si $H\leq G$, entonces $NH\leq G$ y $N\triangleleft NH$. El grupo cociente NH/N es un subgrupo de G/N, de hecho, NH/N es la imagen de H bajo π. $NH/N=\{Nnh \mid n\in N, h\in H\}=\{Nh\mid h\in H\}=\pi(H)$.

2do Teorema de Isomorfismo

Sea $N\trianglelefteq G$ y $H\leq G$. Entonces $H\cap N\triangleleft H$ y $H/H\cap N\cong NH/N$.

Dem:

$$\begin{tikzcd}
& NH & \\
H \arrow[ur, dash] & & N \arrow[ul, dash, "\triangleleft"'] \\
& H \cap N \arrow[ul, dash, "\triangleleft"] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Sea $\pi : G \longrightarrow G/N$ la proyección y sea $\varphi = \pi|_H : H \longrightarrow \pi(H) = NH/N$. Tenemos que $\ker\varphi = H \cap \ker\pi = H \cap N$. Esto implica que $H \cap N \triangleleft H$. Por el 1er Teorema de isomorfismo $H/H\cap N \cong NH/N$.

Prop. Sean $H, N \leq G$.

i) Si $[G:H] < \infty$, entonces $[H : H\cap N] \leq [G:N]$, con la igualdad si y solo si $HN = G$.

ii) Si $|G| < \infty$ y $HN = G$, entonces $|G| = \dfrac{|H||N|}{|H\cap N|}$.

Dem:

i) $\{h(H\cap N) \,/\, h \in H\} \longrightarrow \{gN \,/\, g \in G\}$ dada por $h(H\cap N) \longmapsto hN$. Supongamos que

$h(H\cap N)=k(H\cap N) \Leftrightarrow k^{-1}h\in H\cap N \Rightarrow k^{-1}h\in N \Leftrightarrow hN=kN$. Por lo tanto la función está bien definida. Ahora si $hN=kN$ con $h,k\in H$, entonces las implicaciones de arriba son reversibles, lo que implica que la función es inyectiva. $\therefore [H:H\cap N]\leq [G:N]$.

Ahora, supongamos que $G=HN$ y sea gN una clase lateral izq. Entonces $g=hn$ p.a. $h\in H$ y $n\in N$ así que $gN=hnN=hN$. Por lo tanto la función es sobre y así se da que $[H:H\cap N]=[G:N]=[HN:N]$. Recíprocamente, si $[H:H\cap N]=[G:N]$, es decir, la función que definimos es biyectiva, entonces para cada $g\in G$, existe un $h\in H$ tal que $g^{-1}h\in N$, lo que implica que $g^{-1}h=n$ p.a. $n\in N$. Así $G\subseteq NH$ $\therefore G=NH$.

ii) Sup. $|G|<\infty$ y $G=HN$. Entonces $|H|=[H:H\cap N]|H\cap N|=[G:N]|N\cap H|$. Multiplicando por $|N|$, $|N||H|=|N|[G:N]|H\cap N|=|G||H\cap N|$. Por lo tanto: $|G|=\dfrac{|N||H|}{|H\cap N|}$.

Cor. Sean $H, N \leq G$ tales que $[G : H \cap N] < \infty$. Entonces $[HN : N] = [H : H \cap N]$ y $[HN : H] = [N : N \cap H]$.

$$\begin{tikzcd} & HN \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\ & H \cap N & \end{tikzcd}$$

Teorema de la correspondencia.

Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo y sea $N = \operatorname{Ker} \varphi$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} = \{ U \leq G \,/\, N \subseteq U \} \arrow[r, bend left, "\varphi(\ )"] & \mathcal{T} = \{ V \,/\, V \leq H \} \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}(\ )"] \end{tikzcd}$$

Entonces $\varphi(\ )$ y $\varphi^{-1}(\ )$ son biyecciones, una inversa de la otra, entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$. Más aún, estas funciones respetan contención, indices, normalidad y subgrupos cocientes.