

i) Como $e \in \mathcal{U}$, $\varphi(e) \in \varphi(\mathcal{U})$. Sean $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(\mathcal{U})$. Entonces $xy^{-1} \in \mathcal{U}$, así que $\varphi(x)\varphi(y)^{-1} = \varphi(xy^{-1}) \in \varphi(\mathcal{U})$. $\therefore \varphi(\mathcal{U}) \leq H$.

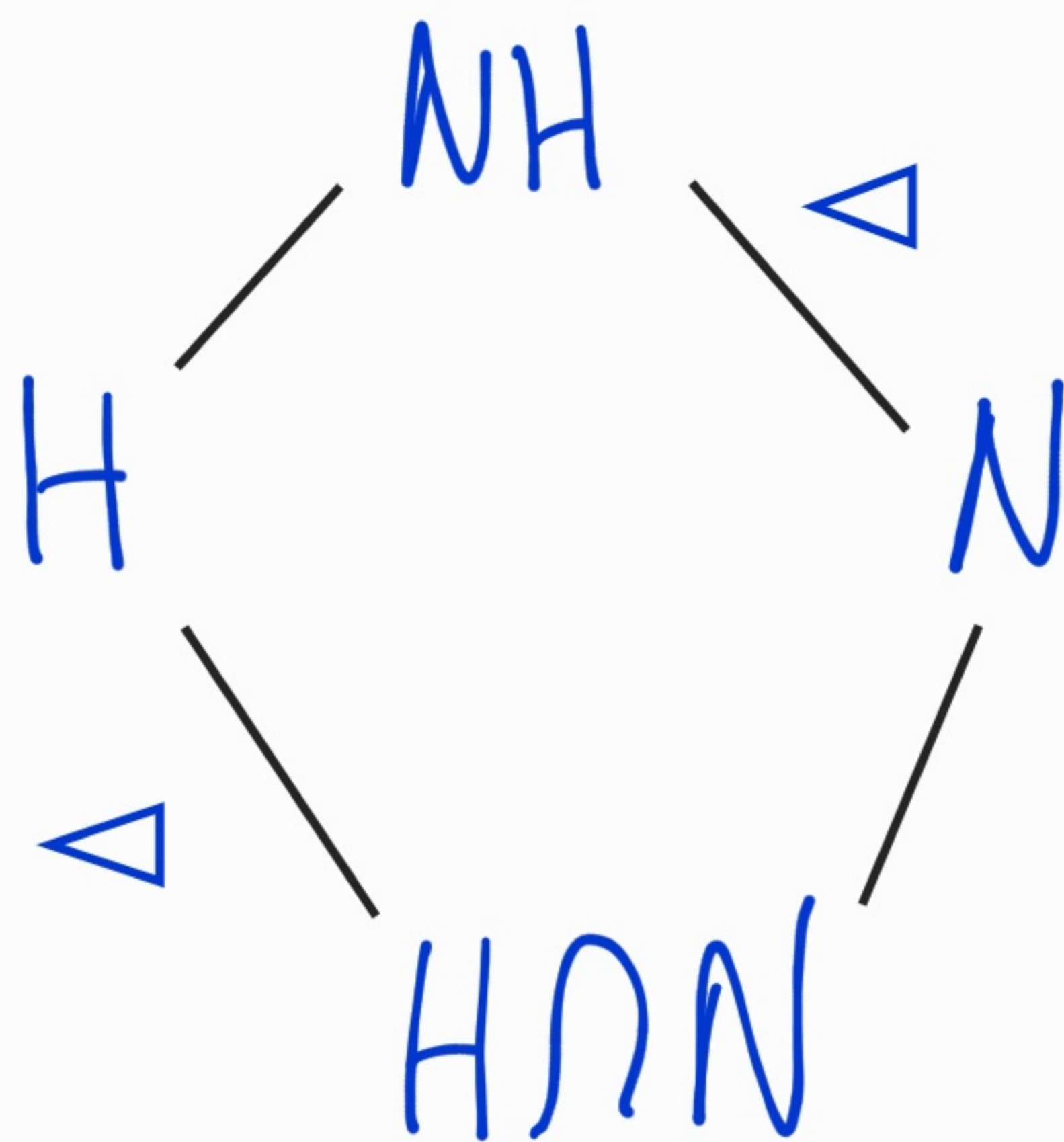
ii) Como $e \in V$ y $\varphi(k) = e \quad \forall k \in \text{Ker } \varphi$, $\text{Ker } \varphi \subseteq \varphi^{-1}(V)$. Sean $x, y \in \varphi^{-1}(V)$ i.e. $\varphi(x), \varphi(y) \in V$. Entonces $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} \in V$, es decir, $xy^{-1} \in \varphi^{-1}(V)$. $\therefore \varphi^{-1}(V) \leq G$. \square

Consideremos $N \trianglelefteq G$ y $\pi: G \rightarrow G/N$. Si $H \leq G$, entonces $NH \leq G$ y $N \triangleleft NH$. El grupo cociente NH/N es un subgrupo de G/N , de hecho, NH/N es la imagen de H bajo π . $NH/N = \{Nnh / n \in N, h \in H\} = \{Nh / h \in H\} = \pi(H)$.

2^{do} Teorema de Isomorfismo

Sea $N \trianglelefteq G$ y $H \leq G$. Entonces $H \cap N \triangleleft H$ y $H/H \cap N \cong NH/N$.

Dem:



Sea $\pi: G \rightarrow G/N$ la proyección y sea $\varphi = \pi|_H: H \rightarrow \pi(H) = NH/N$. Tenemos que $\ker \varphi = H \cap \ker \pi = H \cap N$. Esto implica que $H \cap N \triangleleft H$. Por el 1º Teorema de isomorfismo $H/H \cap N \cong NH/N$.

Prop. Sean $H, N \leq G$.

i) Si $[G:H] < \infty$, entonces $[H:H \cap N] \leq [G:N]$, con la igualdad si y solo si $HN = G$.

ii) Si $|G| < \infty$ y $HN = G$, entonces $|G| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$.

Dem:

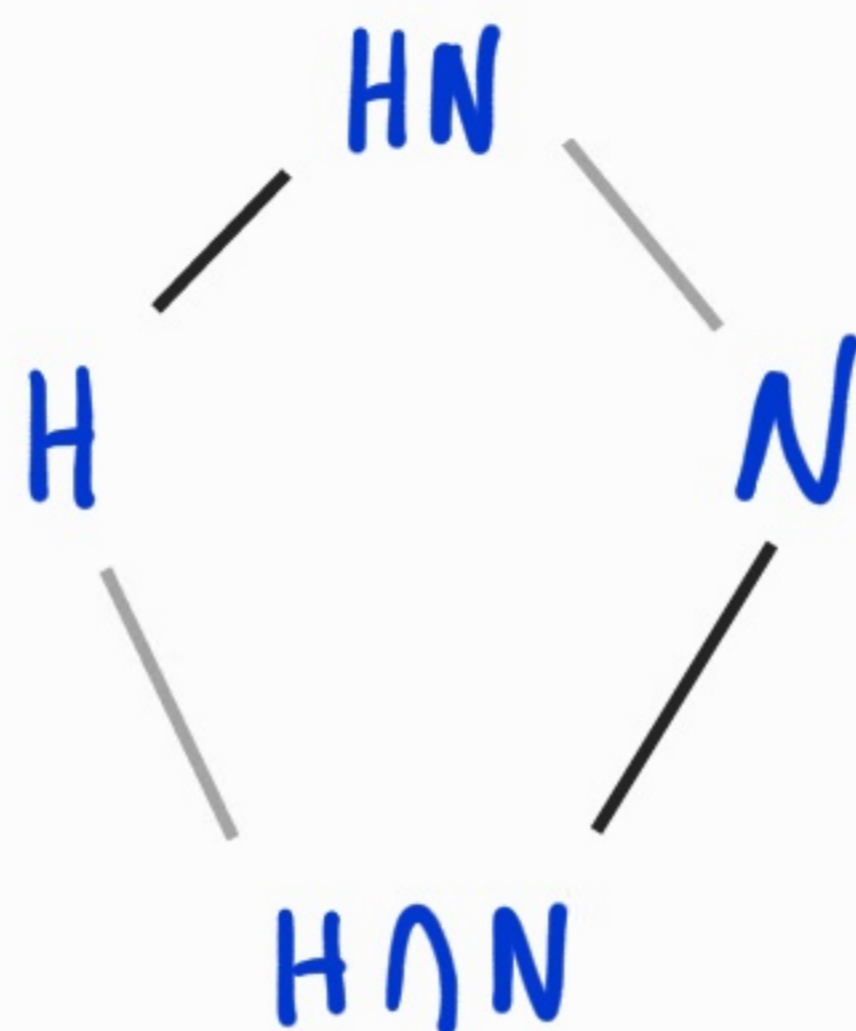
i) $\{h(H \cap N) / h \in H\} \longrightarrow \{gN / g \in G\}$ dada por $h(H \cap N) \mapsto hN$. Supongamos que

$h(H \cap N) = k(H \cap N) \Leftrightarrow k^{-1}h \in H \cap N \Rightarrow k^{-1}h \in N \Leftrightarrow hN = kN$. Por lo tanto la función está bien definida. Ahora si $hN = kN$ con $h, k \in H$, entonces las implicaciones de arriba son reversibles, lo que implica que la función es inyectiva. $\therefore [H : H \cap N] \leq [G : N]$.

Ahora, supongamos que $G = HN$ y sea gN una clase lateral izq. Entonces $g = hn$ p.a. $h \in H$ y $n \in N$ así que $gN = hnN = hN$. Por lo tanto la función es sobre y así se da que $[H : H \cap N] = [G : N] = [HN : N]$. Recíprocamente, si $[H : H \cap N] = [G : N]$, es decir, la función que definimos es biyectiva, entonces para cada $g \in G$, existe un $h \in H$ tal que $g^{-1}h \in N$, lo que implica que $g^{-1}h = n$ p.a. $n \in N$. Así $G \subseteq NH \therefore G = NH$.

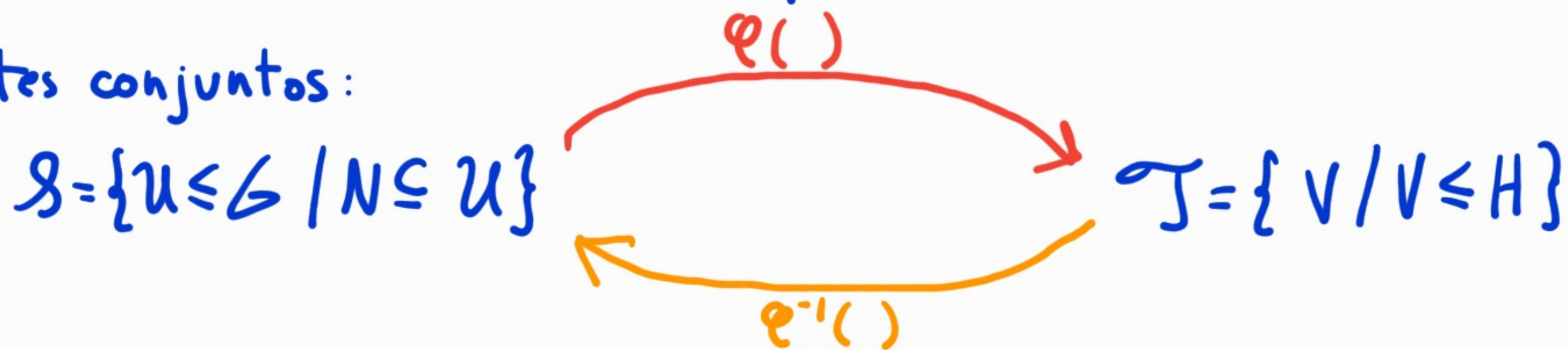
ii) Sup. $|G| < \infty$ y $G = HN$. Entonces $|H| = [H : H \cap N] |H \cap N| = [G : N] |N \cap H|$. Multiplicando por $|N|$, $|N||H| = |N|[G : N]|H \cap N| = |G||H \cap N|$. Por lo tanto: $|G| = \frac{|N||H|}{|H \cap N|}$.

Cor. Sean $H, N \leq G$ tales que $[G:HN] < \infty$. Entonces $[HN:N] = [H:H \cap N]$ y $[HN:H] = [N:N \cap H]$.



Teorema de la correspondencia.

Sea $\varphi: G \rightarrow H$ un homomorfismo suprayectivo y sea $N = \text{Ker } \varphi$. Consideremos los siguientes conjuntos:



Entonces $\varphi()$ y $\varphi^{-1}()$ son biyecciones, una inversa de la otra, entre S y T . Más aún, estas funciones respetan contención, índices, normalidad y subgrupos cocientes.