Algunas definiciones:

Dado un grupo $G$ con su operación $\circ : G\times G \to G$, usualmente vamos a omitir el símbolo $\circ$ y usaremos una notación multiplicativa, es decir, $a\circ b = ab$, siempre y cuando no haya confusión.

Def: Sea $G$ un grupo. Decimos que $G$ es Abeliano si $ab=ba$ para todo $a,b\in G$.

Def: Sea $g\in G$. Supongamos que existe un natural $n$ tal que $g^n=e$. Al menor entero $n$ tal que $g^n=e$ se le llama el orden de $g$ y se denota $\mathcal{O}(g)$. Si tal natural no existe decimos que $g$ tiene orden infinito, $\mathcal{O}(g)=\infty$.

Def: Sea $G$ un grupo. A la cardinalidad de $G$, $|G|$ se le llama el orden del grupo. Si $|G|$ es infinito, decimos que $G$ es un grupo de orden infinito.

Supongamos que tenemos un grupo $G$ con su tabla de multiplicacion

| $G$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | $g_1^2$ | $g_1g_2$ | $g_1g_3$ | $g_1g_4$ | |
| $g_2$ | $g_2g_1$ | $g_2^2$ | $g_2g_3$ | | |
| $g_3$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | |
| $\vdots$ | | | | | |

Pero alguien más escribe los elementos de $G$ con otras etiquetas, digamos $h_1, h_2, h_3, \ldots$

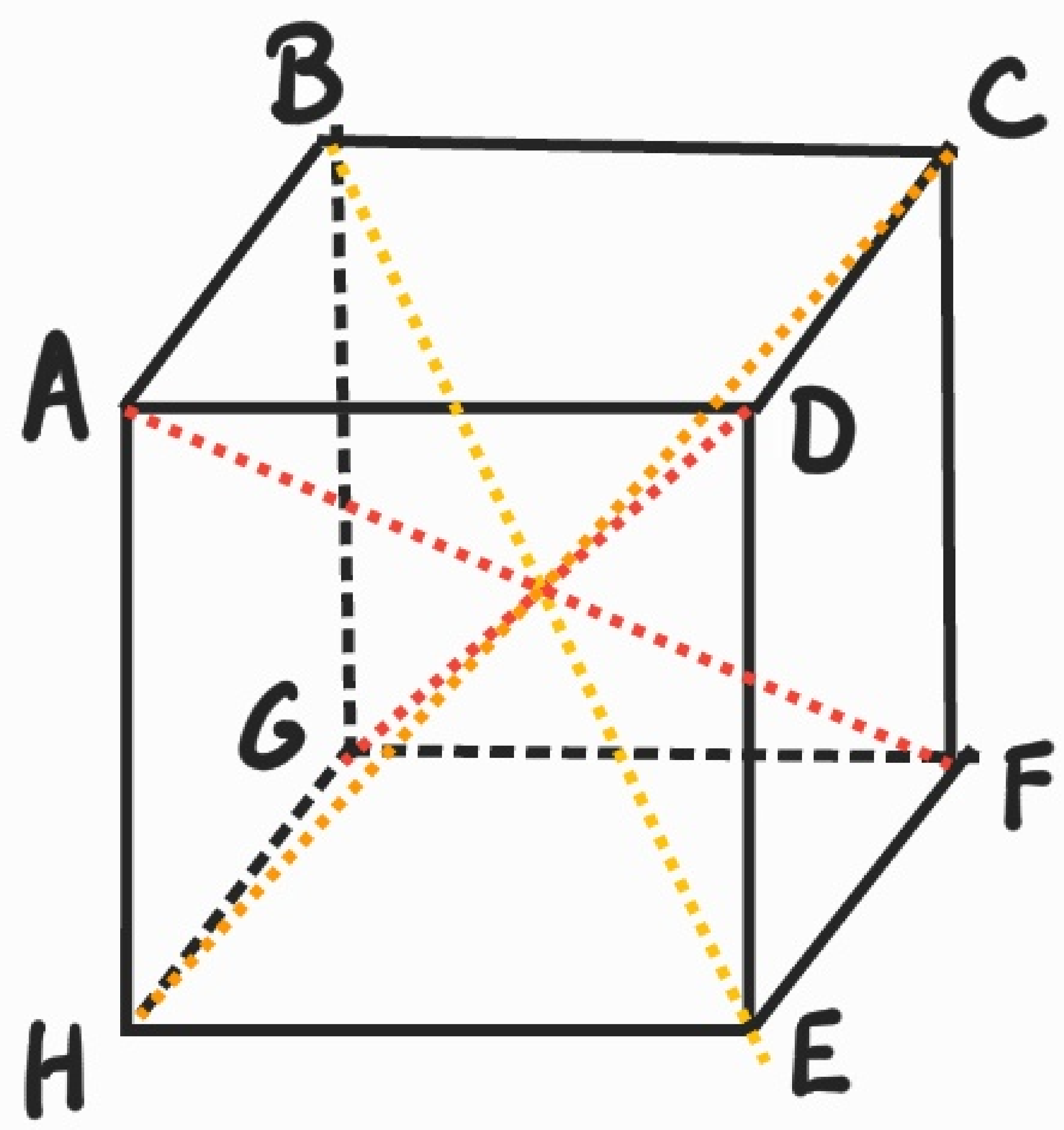
Entonces $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ es esencialmente el mismo que $G = \{h_1, h_2, \ldots\}$

Supongamos que tenemos dos grupos $G$ y $H$ y una función biyectiva $\theta : G \longrightarrow H$.

Decimos que $\theta$ es un isomorfismo si $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ $\forall x, y \in G$. Decimos que $G$ y $H$ son isomorfos $(G \cong H)$ si existe un isomorfismo entre ellos.

Ejemplo: Tenemos el grupo $R$ de rotaciones del cubo y por otro lado tenemos $S_4$, el grupo de permutaciones en $\{1, 2, 3, 4\}$. Sabemos que $|R| = 24$ $\quad S_4 = 4! = 24$.

Afirmamos que $R \cong S_4$.




Diagonales

AF, BE, CH y DG

1 2 3 4

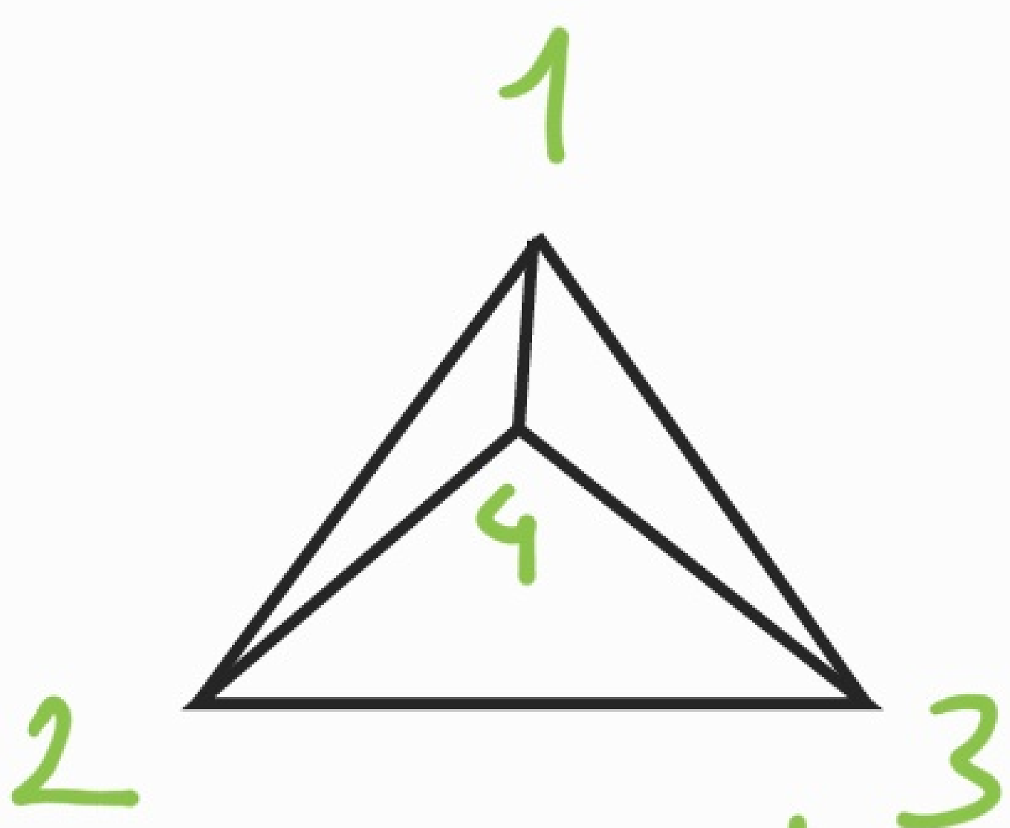
Para dar este isomorfismo nos fijamos en las diagonales del cubo que son 4. Numeremos las diagonales. Cada rotacion permuta estas diagonales $\theta(r) : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\} \in S_4$

$x \longmapsto$ a la diagonal que ocupa $x$ despues de aplicar $r$.

$$\theta : R \longrightarrow S_4$$

Ahora la funcion $\theta$ es inyectiva ya que si dos rotaciones ponen a las diagonales en la misma posicion tienen que ser la misma rotacion.

Como $|R|$ y $|S_4|$ son finitos entonces $\theta$ es un isomorfismo.



Tetraedro

El grupo de simetrias del tetraedro es isomorfo a $S_4$

# Subgrupos

Def: Sea $G$ un grupo. Un subconjunto $H \subseteq G$ es un subgrupo si $H$ es cerrado bajo la multiplicación en $G$ y forma un grupo con esta multiplicación, es decir, $h_1 h_2 \in H$ $\forall h_1, h_2$, $e \in H$ y $h^{-1} \in H$ $\forall h \in H$

Ejemplos:

- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +) \subseteq (\mathbb{C}, +)$ $\langle 1 \rangle$
- $O_n(K) \subseteq GL_n(K)$
- $\{\pm 1, \pm i\} \subseteq Q_8$ $\langle i \rangle$
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}^*, \cdot) \subseteq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

·) $S^1 \subseteq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$\langle 90^\circ \rangle$

·) $\{Id, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} \subseteq D_8$

·) $\{Id, v\} \subseteq D_8$

$\langle v \rangle$

Notación: Si $H$ es un subgrupo del grupo $G$, lo denotamos $H \leq G$

**Lema:** Sea $G$ un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto no vacío. Supongamos que $xy^{-1} \in H$ para todo $x, y \in H$. Entonces $H$ es un subgrupo de $G$. En particular cualquier subconjunto no vacio de $G$ cerrado bajo la multiplicacion y tomar inversos en $G$ es un subgrupo.

**Dem:**

$\emptyset \neq H \subseteq G$ entonces existe $h \in H$. Por hipotesis $\underline{e} = hh^{-1} \in H$. Como $e, h \in H$, la hip. me dice que $\underline{h^{-1}} = eh^{-1} \in H$.

Sean $h, k \in H$. Entonces $k^{-1} \in H$. Por lo tanto $\underline{hk \in H}$.