Prop. Sea G un grupo finito y abeliano y supongamos que p es un divisor de $|G|$. Entonces G tiene un elemento de orden p.

Dem:

Por inducción en $|G|$. La base de inducción es clara. Si G no es de orden primo, entonces existe $e < H < G$. Entonces $|H| < |G|$ y $[G:H] < |G|$. Si $p \mid |H|$, entonces por hipotesis de inducción, H tiene un elemento $h \in H \subseteq G$ de orden p. Si $p \nmid |H|$, entonces $p \mid [G:H]$ ie, $p \mid |G/H|$. Por hipotesis de inducción, G/H tiene un elemento gH de orden p, ie, $g^p \in H$. Sea $n = O(g^p)$, entonces $g^{pn} = e$. Asi $O(g^n) \mid p$. Si $O(g^n) = 1$ ie $g^n = e$, entonces $(gH)^n = g^nH = H$ $\therefore p \mid n$, así $pm = n$. Si $g^m \neq e$, entonces $(g^m)^p = e$ y asi $O(g^m) = p$. Si $g^m = e$ entonces $p \mid m$ y así $m = pm_2$. Si $g^{m_2} \neq e$ ✓ si $g^{m_2} = e$, ent $p \mid m_2$. Siguiendo así llegamos a pk con $(p,k) = 1$ y $g^{pk} = e$ y $g^k \neq e$. $\therefore O(g^k) = p$.

Cor. Sea G un grupo abeliano y finito. Si $m \mid |G|$ entonces G tiene un subgrupo de orden m.

Dem:

Por el Teorema Fundamental de la aritmetica, $m = p_1 \cdots p_k$ con p_i primo. Hacemos la prueba por inducción sobre k. Si $k=1$, entonces el resultado lo da la Proprosición anterior. Sup que el resultado es valido para divisores de $|G|$ con menos de k factores primos en su factorización. Sea $n = p_1 \cdots p_{k-1}$. Por la proposición anterior existe $H \leq G$ tal que $|H| = p_k$. Entonces $n \mid |G/H|$. Por hipotesis de inducción existe $N/H \leq G/H$ tal que $|N/H| = n$. Como G es finito, $|N/H| = \frac{|N|}{|H|} = \frac{|N|}{p_k} = n$. Por lo tanto $|N| = np_k = m$.

Ejemplo. El Corolario anterior no es cierto si G no es abeliano. Tomemos un grupo simple G con orden n. Sea p el menor primo que divide a n, entonces $n = pm$. Si $H \leq G$ tal que $|H| = m$, ent $[G:H] = p$ lo que implica que $H \trianglelefteq G$!.