Def: Un grupo es un conjunto G junto con una operación binaria $\circ : G \times G \longrightarrow G$ que satisface:

(i) La operacion es asociativa, es decir, para todo $x, y, z \in G$ se tiene que:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

(ii) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e \circ x = x = x \circ e$

(iii) Para todo $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x \circ y = e = y \circ x$

A e se le llama neutro y al elemeto y se le llama inverso de x y se denota x^{-1}

Esta definición nos permite hablar de grupos de manera mas abstracta y no solo de grupos de permutaciones.

Ejemplos: ·) Todos los grupos de permutaciones son grupos.

·) S_X, $GL(V)$, Grupos de rotaciones...

·) $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo.

·) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ es un grupo.

·) Si K es un campo, entonces $K^*=K\setminus\{0\}$ es un grupo con la multiplicación.

·) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ "enteros módulo n" son un grupo $+n$

- $O_n(K) = \{ A \in GL_n(K) \,/\, \det(A) = \pm 1 \}$.

- $S^1 = \{ a+bi \in \mathbb{C} \,/\, a^2+b^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{C}$ es un grupo con la multiplicacion de complejos.

$$S^1 = \{ \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \,/\, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

- Sea $H = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$ que cumplen que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k$$

$$kj = -i$$

$$ik = -j$$

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl, bend right] & \\ j \arrow[rr] & & k \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

Con estas reglas H es un grupo, al cual se le llama el grupo de cuaterniones (o de cuaternios) denotado Q_8 (quaternion group)

•) ¿Podemos dar un grupo G de funciones en un conjunto X tal que $G \not\subseteq S_X$?

Sea $\mathbb{R}$ los reales y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle/ k \in \mathbb{R}^* \right\}$. Es claro que G es un subconjunto de funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Entonces G es un grupo con la multiplicacion de matrices donde el neutro

$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y dado $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ existe

$\begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Notemos que como funciones, los elementos de G <u>no</u> <u>son</u> biyecciones, ie. $G \not\subseteq S_{\mathbb{R}^2}$

Lema: Sea G un grupo. Entonces, para $a, b \in G$ existen elementos unicos $x, y \in G$ tales que $ax = b$ y $ya = b$. En particular, el neutro $e \in G$ es unico y el inverso de cada elemento también es unico.

Dem:

Sean $a, b \in G$. Para a existe $a^{-1} \in G$ t.q. $aa^{-1} = e$ entonces $a(a^{-1}b) = b$. Por lo tanto podemos tomar $x = a^{-1}b$. Analogamente $y = ba^{-1}$.

Ahora, si $ax = ax'$, entonces $a^{-1}ax = a^{-1}ax'$ y así $x = x'$. Analogamente y es único.

Notemos que $e \in G$ es solución de las ecuaciones $ax = a$ y $yb = b$ con $a, b \in G$

y dado $a \in G$, el inverso de a es solución de las ecuaciones $ax = a$ y $xa = a$.

Teorema.

Sea G un conjunto con una operacion binaria asociativa y supongamos que existe $e \in G$ con las siguientes propiedades:

(1) $xe = x$ para todo $x \in G$, y

(2) para cada $x \in G$, existe $y \in G$ con $xy = e$.

(1') $ex = x$

(2') $\forall x \ \exists y$ t.q. $yx = e$

Entonces G es un grupo.

Dem:

Sea $x \in G$ y sea $y \in G$ dado por la propiedad (2) i.e., $xy = e$. Basta demostrar $ex = x$ y $yx = e$.

Por (2) existe $z \in G$ tal que $yz = e$. Entonces

$$x = xe = x(yz) = (xy)z = ez.$$

y así

$$\underbrace{yx = y(ez) = (ye)z = yz = e}$$

Ahora

$$ex = (xy)x = x(yx) = xe = x$$

$\blacksquare$