Lema. Sea $g \in S_X$. Entonces $\mathcal{O}(g)$ es el mínimo común múltiplo de los tamaños de los ciclos disjuntos que aparecen en la descomposición de g.

Dem:

Escribamos $g = c_1 \cdots c_\ell$ como producto de ciclos disjuntos no triviales. Como los ciclos conmutan, $g^n = c_1^n \cdots c_\ell^n$ para todo n. Sup. que $g^n = Id$, y tomemos un c_i. Sea $\alpha \in X$, si c_i fija a α, entonces c_i^n también. Si c_i mueve a α, entonces c_j fija α $\forall i \neq j$. Así que c_j^n fija a α $\forall j \neq i$. Se sigue que $\alpha = g^n(\alpha) = c_i^n(\alpha)$ y por lo tanto c_i^n fija a α. Entonces $c_i^n = Id$.

Como un m-ciclo tiene orden m, tenemos que $g^n = Id$ si y solo si n es un múltiplo de los tamaños de los ciclos c_i.

Ejemplo: $g = (254)(37) \in S_8$ tiene orden $mcm(3,2) = 6$

Lema: Sea g un m-ciclo en S_X. Si $h \in S_X$, entonces hgh^{-1} es un m-ciclo

De hecho $hgh^{-1} = (h\alpha_1 \cdots h\alpha_m)$

Dem:

Notemos que $h(\alpha_i)$ son todos distintos y así $(h\alpha_1 \cdots h\alpha_m)$ es un m-ciclo.

Tomemos $h\alpha_i$ con $1 \leq i \leq m-1$. Entonces $g^{h^{-1}}(h\alpha_i) = hgh^{-1}(h\alpha_i) = hg\alpha_i = h\alpha_{i+1}$.

De la misma forma $g^{h^{-1}}(h\alpha_m) = h\alpha_1$. Ahora sea $\beta \in X \setminus \{h\alpha_1, \ldots, h\alpha_m\}$. Entonces

$h^{-1}\beta \neq \alpha_i$ $\forall 1 \leq i \leq m$ y así $h^{-1}\beta$ es fijado por g. Por lo tanto

$hgh^{-1}(\beta) = hh^{-1}(\beta) = \beta$. Por lo tanto $hgh^{-1} = (h\alpha_1 \cdots h\alpha_m)$.

Teorema.

Dos elementos de S_X son conjugados si y solo si tienen la misma estructura cíclica.

Dem:

Sea $g \in S_X$, $g = c_1 \cdots c_\ell$ con $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$ ciclos disjuntos. Si $h \in S_X$, entonces $hgh^{-1} = hc_1h^{-1}hc_2h^{-1} \cdots hc_\ell h^{-1}$. Se sigue del lema anterior que hc_ih^{-1} tiene el mismo tamaño que c_i y los ciclos $\{hc_1h^{-1}, \ldots, hc_\ell h^{-1}\}$ son disjuntos. Por lo tanto g y g^h tienen la misma estructura cíclica.

Recíprocamente, supongamos que $u = c_1 \cdots c_\ell$ y $v = d_1 \cdots d_\ell$ tienen la misma estuvctura cíclica, es decir, los ciclos c_i's son ajenos al igual que los d_j's y c_i y d_i tienen el mismo tamaño m_i. Notemos que u y v tienen exactamente $|X| \setminus \sum m_i$ puntos fijos. Fijemos un orden en los ciclos y uno en los puntos fijos. Constiuimos una permutacion h en X como sigue. Para $\alpha \in X$, α es la j-ésima entrada de un c_i ó es el j-ésimo punto fijo de u. Definimos $h(\alpha)$ como la j-ésima entrada de d_i o el j-ésimo punto fijo de v, resp. Por el lema anterior

Debería ser claro que $huh^{-1} = v$.

Ejemplo: Consideremos $u = (1\,3)(2\,4\,5\,6)$ y $v = (3\,7)(1\,8\,2\,4)$ en S_8. Escribamos los puntos fijos de u y de v. $F_u = \{7, 8\}$ $F_v = \{5, 6\}$. Definimos h como:

$1 \longmapsto 3$
$2 \longmapsto 1$
$3 \longmapsto 7$
$4 \longmapsto 8$
$5 \longmapsto 2$
$6 \longmapsto 4$
$7 \longmapsto 5$
$8 \longmapsto 6$

Por lo tanto $h = (1\,3\,7\,5\,2)(4\,8\,6)$.

Y así $huh^{-1} = v$.

¿Cómo encontramos alguien en el centralizador de u?

Nothemos que $u = (1\,3)(4\,5\,6\,2)$. Entonces la permutación $g =$

$1 \longmapsto 1$
$2 \longmapsto 4$
$3 \longmapsto 3$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 2$
$7 \longmapsto 7$
$8 \longmapsto 8$

Está en $C_{S_8}(u)$

$g = (2\,4\,5\,6)$