Podemos dar otra prueba del siguiente corolario

Cor. Sea $H \leq G$ con G finito. Si $\bigcup_{g \in G} H^g = G$, entonces $H = G$.

Dem:

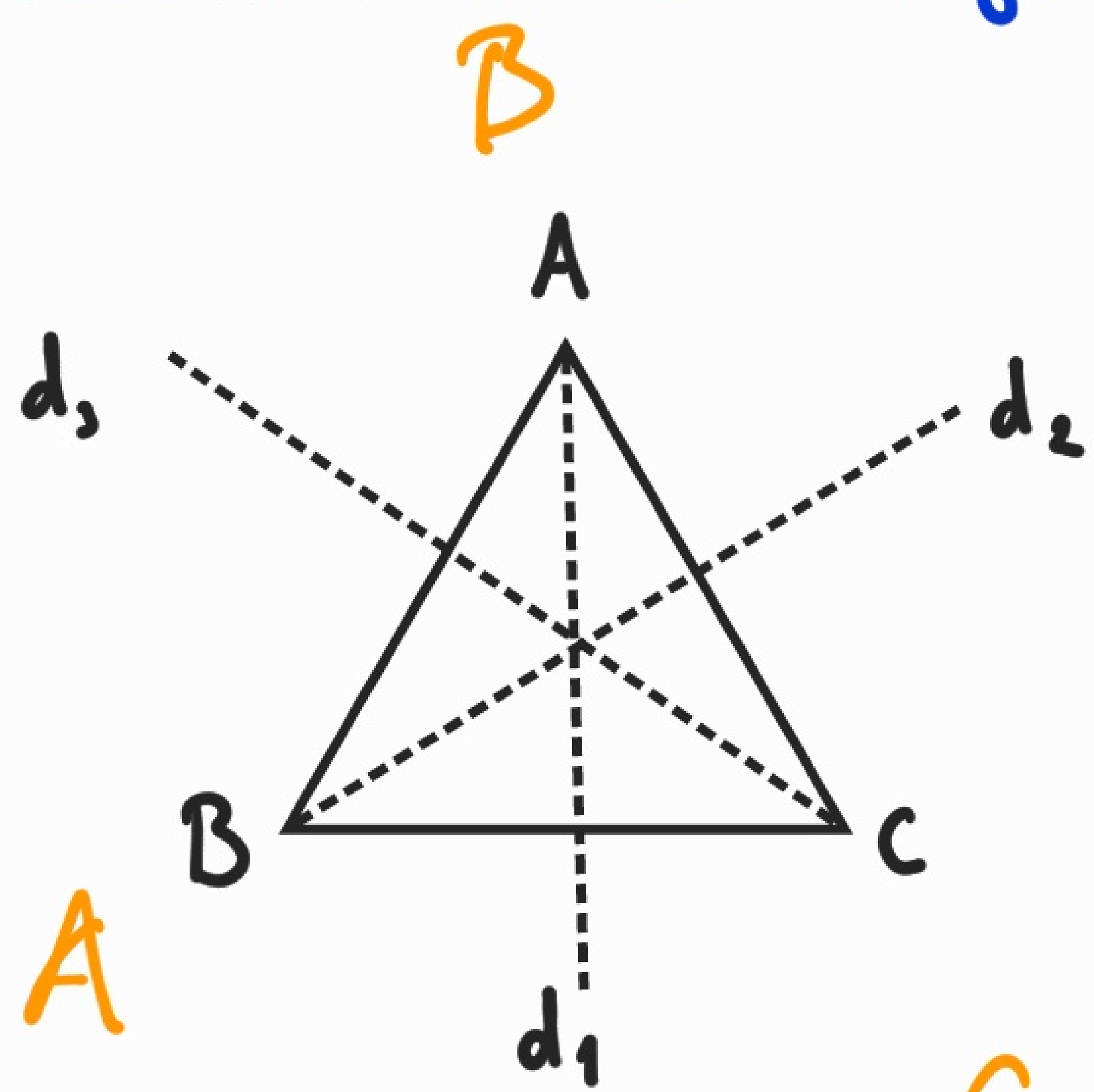
Sup que $H < G$. Dadas clases laterales xH y yH tenemos que $(yx^{-1})xH = yH$.

Por lo tanto, G actua transitivamente en $\Omega = \{xH \mid x \in G\}$. Notemos que $|\Omega| > 1$

Por el corolario anterior, existe un $g \in G$ que no fija a ninguna clase lateral. Como el estabilizador de xH es $H^{x^{-1}}$, se sigue que g no está en ningún conjugado de H.

Se sigue que $\bigcup_{g \in G} H^g < G$.

Ejemplo. Consideremos el grupo $D_6 = D_{2(3)}$, es decir, el grupo diedrico asociado a las simetrias de un triangulo equilatero.



$D_6 = \{Id, d_1, d_2, d_3, R_1, R_2\}$ donde R_1 es la rotación de $120°$ y R_2 es la rotacion de $240°$.

	Id	d_1	d_2	d_3	R_1	R_2
Id	Id	d_1	d_2	d_3	R_1	R_3
d_1	d_1	Id	R_1	R_2	d_2	d_3
d_2	d_2	R_2	Id	R_1	d_3	d_1
d_3	d_3	R_1	R_2	Id	d_1	d_2
R_1	R_1	d_3	d_1	d_2	R_2	Id
R_2	R_2	d_2	d_3	d_1	Id	R_1

De la tabla de multiplicar vemos que $Z(D_6) = \{Id\}$. Ahora, calculemos los centralizadores:

$d_1 \in C_6(d_1)$ así que $|C_6(d_1)| = 2$ ó 3 y no puede ser 6 porque el centro es trivial. De la tabla vemos d_1 no conmuta con ningún otro elemento así que $|C_6(d_1)| = 2$. De la misma manera $|C_6(d_2)| = 2 = |C_6(d_3)|$

Por lo tanto se tiene que $C_{D_6}(d_i) = G_{d_i} = \langle d_i \rangle$. Ahora, para las rotaciones, se tiene que $R_1, R_2 \in C_{D_6}(R_i)$ así que $|C_{D_6}(R_i)| = 3$. Por el T.C-F el número de clases de conjugación en D_6 es $\frac{1}{6}\Big(|C_G(Id)| + |C_G(d_1)| + |C(d_2)| + |C(d_3)| + |C(R_1)| + |C(R_2)|\Big)$

$= \frac{1}{6}(6+2+2+2+3+3) = \frac{18}{6} = 3$.

Por FCP, $|O| = [G : G_\alpha]$ con $\alpha \in O$. Así $|O_{d_i}| = [D_6 : C(d_i)] = 3$ y $|O_{R_i}| = [D_6 : C(R_i)] = 2$

Por lo tanto Las clases de conjugacion de D_6 son: $\{Id\}$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ y $\{R_1, R_2\}$.