Dem:

Sea $\Omega = \{xH \mid x \in G\}$. Entonces G actua (por la izq.) en Ω por multiplicación. Sea N el kernel de esta accion. Entonces $N \trianglelefteq G$ y $G/N \hookrightarrow S_\Omega$. Como $|\Omega| = n$, $|S_\Omega| = n!$.

Por Lagrange, $[G:N] = |G/N|$ divide a $n!$. Ahora, si $x \in N$, entonces $x \in xH = x \cdot H = H$.

Por lo tanto $N \subseteq H$.

Para la afirmación final, como $n > 1$, $H \lneq G$. Esto implica que $N \lneq G$. Finalmente si $N = \{e\}$, $[G:N] = |G| \mid n!$! Por lo tanto $e \lneq N \lneq G$.

Cor. Sea $H \leq G$ con G finito. Si $[G:H] = p$ con p el menor primo que divide a $|G|$ entonces $H \trianglelefteq G$.

Dem:

Existe $N \trianglelefteq G$ satisfaciendo (i) y (ii) del teorema anterior. Entonces $N \subseteq H$, sea $m = [H:N]$

Se sigue que $|G|=[G:H][H:N]=pm$ divide a $p!=p(p-1)!$. Entonces $m\mid(p-1)!$ y esto implica que cualquier divisor primo q de m tiene que ser menor igual que $p-1$. Sin embargo, por Lagrange, q divide a $|G|$ ∇ Por lo tanto $m=1$ y así $H=N\trianglelefteq G$.

Cor. Sea $H\leq G$ con $[G:H]<\infty$. Entonces existe un subgrupo normal N tal que $[G:N]<\infty$ y $N\subseteq H$.

Supongamos que tenemos un grupo G y $U\leq V\leq G$ y G es finito, por Lagrange $|G|=|V|[G:V]=|U|[V:U][G:V]$ y $\frac{|G|}{|U|}=[G:U]$ $\therefore$ $[G:U]=[G:V][V:U]$. Ahora si G <u>no</u> es finito y $[G:U]<\infty$, por el Corolario anterior $\exists N\trianglelefteq G$ t.q. $N\subseteq U\leq V\leq G$ y el índice de N es finito. Entonces podemos trabajar en el grupo finito $\bar{G}=G/N$. Así $[\bar{G}:\bar{U}]=[\bar{G}:\bar{V}][\bar{V}:\bar{U}]$ con $\bar{V}=V/N$ y $\bar{U}=U/N$. Pero por el Teorema de la Correspondencia $[\bar{G}:\bar{U}]=[G:U]$, $[\bar{G}:\bar{V}]=[G:V]$ y $[\bar{V}:\bar{U}]=[V:U]$.