Grupo Simétrico.

Recordemos que dado un conjunto X, el grupo de permutaciones de X es denotado S_X. En este capitulo, solo consideraremos conjuntos finitos, digamos $X=\{1,2,\dots,n\}$ así que $S_X=S_n$ y $|S_n|=n!$

Notación cíclica: Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ cualesquiera distintos elementos de X. Escribimos $g=(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m)$ para denotar a la permutación definida por:

1. $g(\alpha_i)=\alpha_{i+1}\ \forall\, 1\leq i<m$

2. $g(\alpha_m)=\alpha_1$

3. $g(\beta)=\beta\ \forall \beta\in X\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$

A $g=(\alpha_1\,..\,\alpha_m)$ lo llamamos un m-ciclo. Notemos que un m-ciclo puede ser escrito en de m maneras distintas. Por lo tanto, si $|X|=n$, el número de m-ciclos en S_n es $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m}$.

Def: Dos permutaciones son disjuntas si no hay un elemento que sea movido por ambas.

Por ejemplo los ciclos $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ y $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)$ con $k \geq 2$ son disjuntos precisamente cuando ninguno de los α_j es igual a algun β_j.

Hay que observar que dos permutaciones disjuntas conmutan.

Lema: Sea $g \in S_X$ y sea $Y \subseteq X$ una orbita de la acción de $\langle g \rangle$ en X. Sea $\alpha \in Y$ y escribamos $m = |Y|$. Entonces

1. $\alpha, g\alpha, \dots, g^{m-1}\alpha$ son todos distintos.
2. $g^m \alpha = \alpha$ y
3. $Y = \{ g^i \alpha \mid 0 \leq i < m \}$.

Dem:

Tenemos la accion dada por la evaluación, ie, $\langle g \rangle \times X \longrightarrow X$ como $g^l \cdot \alpha = g^l(\alpha)$.

Tenemos que $m = |Y| = |\langle g\rangle / H|$ donde H es el estabilizador de α. Como $\langle g\rangle$ es cíclico, $\langle g\rangle/H$ también, así que $\langle g\rangle/H = \{H, gH, (gH)^2, \dots, (gH)^{m-1}\}$. Por lo tanto g^l con $1 \leq l < m$ no está en H, ie, <u>no</u> fija a α. Entonces $\alpha, g\alpha, \dots, g^{m-1}\alpha$ son distintos. Tenemos que $H = (gH)^m = g^m H \therefore g^m \in H$ lo que implica que $g^m(\alpha) = \alpha$. Por último, por cardinalidad

$$Y = \{g^i\alpha \mid 1 \leq i < m\}$$

En la situación del lema anterior, escribimos g_Y para denotar a la permutación que fija cada elemento de $X \setminus Y$ y actua en Y exactamente como g. Entonces g_Y es el m-ciclo $(\alpha, g\alpha, \dots, g^{m-1}\alpha)$. Los ciclos g_Y son disjuntos para distintas orbitas.

Teorema.

Sea $g \in S_X$ y sea Γ el conjunto de $\langle g\rangle$-orbitas no triviales en X. Entonces $g = \prod_{Y \in \Gamma} g_Y$ y esta es la unica manera de escribir a g como producto de ciclos disjuntos no triviales.

Dem:

Sea $\pi = \prod_{Y \in \Gamma} g_Y$ y sea $\alpha \in X$. Si g fija a α, entonces α <u>no</u> está en ningún $Y \in \Gamma$ y así todo g_Y fija a α. Por lo tanto $\pi\alpha = \alpha = g\alpha$. Si g mueve a α, α está en un $Y \in \Gamma$. Entonces $g_Y(\alpha) = g(\alpha)$ y tanto α como $g(\alpha)$ son fijados por los otros factores de π ya que viven en la misma orbita. En este caso tambien tenemos que $\pi\alpha = g(\alpha)$ y por lo tanto $\pi = g$.

Ahora supongamos que $g = \prod_{c \in \Lambda} c$ con Λ un conjunto de ciclos disjuntos no triviales. Si $Y \in \Gamma$, tomamos $\alpha \in Y$. Como g mueve a α, tambien lo debe de hacer un $c \in \Lambda$. Como son ciclos disjuntos, todos los otros elementos de Λ no mueven a los elementos de la $\langle c \rangle$-orbita que contiene a α y por lo tanto g actua en esta orbita como lo hace c. Se sigue que la $\langle c \rangle$-orbita que contiene a α es Y y $c = g_Y$. Por lo tanto $\{g_Y \mid Y \in \Gamma\} \subseteq \Lambda$.

Si $c \in \Lambda$, entonces c mueve algún $\alpha \in X$ y así g también mueve a α y por tanto

$\alpha \in Y$ para algún $Y \in \Gamma$. Como g_Y y c están los dos en Λ y mueven a α entonces $c = g_Y$.

Ejemplo: Escribamos la siguiente permutación como producto de ciclos disjuntos.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Vayamos en orden ascendente. Notemos que 1 es fijado por g. El 2 determina el ciclo $(2\ 5\ 4)$. El 3 determina el ciclo $(3\ 7)$ y 6 y 8 quedan fijos. Ya hemos considerado todos los índices, por lo tanto $g = (2\,5\,4)(3\,7) \in S_8$.