Si tenemos un subgrupo normal $N \triangleleft G$ y consideramos el grupo cociente G/N podemos definir el siguiente homomorfismo:

$\pi : G \to G/N$ como $\pi(x) = Nx$. Notemos que $\pi(xy) = Nxy = NxNy = \pi(x)\pi(y)$.

Este homomorfismo siempre es suprayectivo y se le conoce como la proyeccion canonica de G en G/N.

Lema: Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo. Entonces:

i) $\varphi(e) = e$ y $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$ $\forall x \in G$.

ii) $N = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ es un subgrupo normal de G

iii) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow Nx = Ny$.

iv) φ es inyectiva $\Leftrightarrow N = \{e\}$.

Dem:

i) $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$. Cancelando, $e = \varphi(e)$. Ahora, $e = \varphi(e) = \varphi(xx^{-1})$

$= \varphi(x)\varphi(x^{-1})$. Por lo tanto $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

ii) Por (i), $e \in N$. Sean $x, y \in N$. Entonces $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = ee^{-1} = e$.

Por lo tanto $xy^{-1} \in N$ y así $N \leq G$. Ahora sea $n \in N$ y $g \in G$. Entonces

$\varphi(g^{-1}ng) = \varphi(g)^{-1}\varphi(n)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}e\varphi(g) = e$. Así que $g^{-1}Ng \subseteq N$ $\forall g \in G$. Por lo tanto

$N \trianglelefteq G$.

iii) $\varphi(x) = \varphi(y) \iff \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e \iff \varphi(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} \in N \iff Nx = Ny$.

iv) Si φ es inyectiva, entonces $N = \{e\}$ por (i). Ahora supongamos que $N = \{e\}$ y $\varphi(x) = \varphi(y)$

Entonces $Nx = Ny$ ie $ex = ey$. Por lo tanto $x = y$.

Def. Dado $\varphi : G \to H$ un homomorfismo, al subgrupo normal N de G del lema anterior se le llama el kernel de φ y se denota $\ker\varphi$.

Regresando a nuestros ejemplos:

$\ker(\det) = \{A \in GL_n(K) \,/\, \det(A) = 1\} = SL_n(K)$ el grupo especial lineal.

Si $N \trianglelefteq G$, $\pi : G \to G/N$ es la proyección canónica, $g \in \ker \pi \Leftrightarrow Ng = N \Leftrightarrow g \in N$

Por lo tanto $N = \ker \pi$.

Cor. Sea G un grupo. Entonces $N \trianglelefteq G$ si y solo si N es el kernel de algún homomorfismo que sale de G.

Dem:

$\Rightarrow)$ Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces $N = \ker \pi$ con $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica.

$\Leftarrow)$ Se sigue del lema anterior.

1er Teorema de Isomorfismo.

Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo y sea $N = \ker \varphi$. Entonces existe un unico isomorfismo $\theta : G/N \to H$ tal que $\varphi = \theta\pi$ donde $\pi : G \to G/N$ es la proyección canonica.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/N \arrow[ur, dashed, "\cong", "\exists!\,\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Dem:

Sea $\theta : G/N \to H$ definido como $\theta(Ng) = \varphi(g)$. Veamos que θ está bien definida. Sea $Nx = Ny \in G/N$. Entonces $xy^{-1} \in N$ ie, $e = \varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1}$.

Así que $\varphi(y)=\varphi(x)$, lo que implica que $\theta(Nx)=\theta(Ny)$. Por lo tanto θ está bien definida y cumple que $\theta\pi=\varphi$. Como φ es suprayectiva, θ tambien lo es.

Ahora supongamos que $\theta(Nx)=\theta(Ny)$, ie, $\varphi(x)=\varphi(y)$. Por el lema $Nx=Ny$. Por lo tanto θ es un isomorfismo. Si $\theta' : G/N \to H$ cumple que $\varphi=\theta'\pi$, entonces $\theta'(Ng)=\varphi(g)=\theta(Ng)$ $\therefore \theta'=\theta$

Cor. Salvo isomorfismo, los unicos grupos cíclicos son los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con $n>0$.

Dem:

Sea $C=\langle c\rangle$ un grupo cíclico. Definimos $\varphi : \mathbb{Z}\to C$ como $\varphi(k)=c^k$. Tenemos que $\varphi(k+l)=c^{k+l}=c^kc^l=\varphi(k)\varphi(l)$. Por lo tanto φ es un homomorfismo. Mas aún, como cada elemento de C es una potencia de c, φ es suprayectiva. Por el primer teorema de isomorfismo $C \cong \mathbb{Z}/K$ donde $K = \ker\varphi$. Como $\mathbb{Z}$ es cíclico y $K \leq \mathbb{Z}$, entonces $K = \langle n \rangle = n\mathbb{Z}$ p.a. $n > 0$.

Def: Sea $\varphi: G \longrightarrow H$ un homomorfismo y $U \subseteq G$ y $V \subseteq H$.

1. La imagen de U bajo φ se define como el subconjunto $\varphi(U) = \{\varphi(u) / u \in U\}$.
2. La imagen inversa de V bajo φ se define como el subconjunto $\varphi^{-1}(V) = \{g \in G / \varphi(g) \in V\}$.

Lema. Sea $\varphi: G \longrightarrow H$ un homomorfismo.

i) Si $U \leq G$, entonces $\varphi(U) \leq H$.

ii) Si $V \leq H$, entonces $\varphi^{-1}(V) \leq G$ y $\ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(V)$.

Dem: