¿Cuántos elementos tiene G?

$$\boxed{|G| = 8}$$

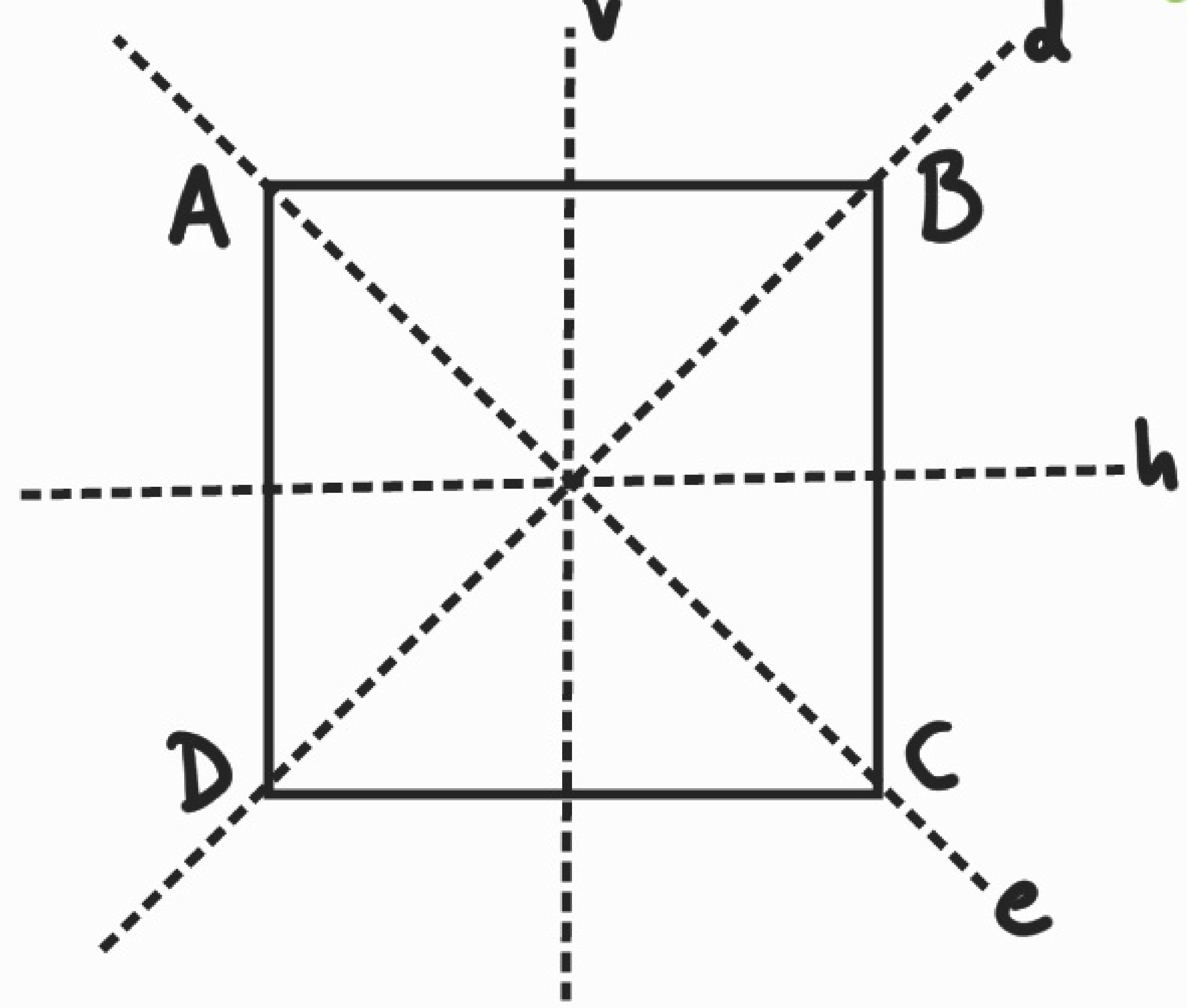
A G se le llama el grupo diedrico de 8 elementos.

Usualmente se le denota $D_8 = D_{2(4)}$

Podemos computar las composiciones de los elementos de G:

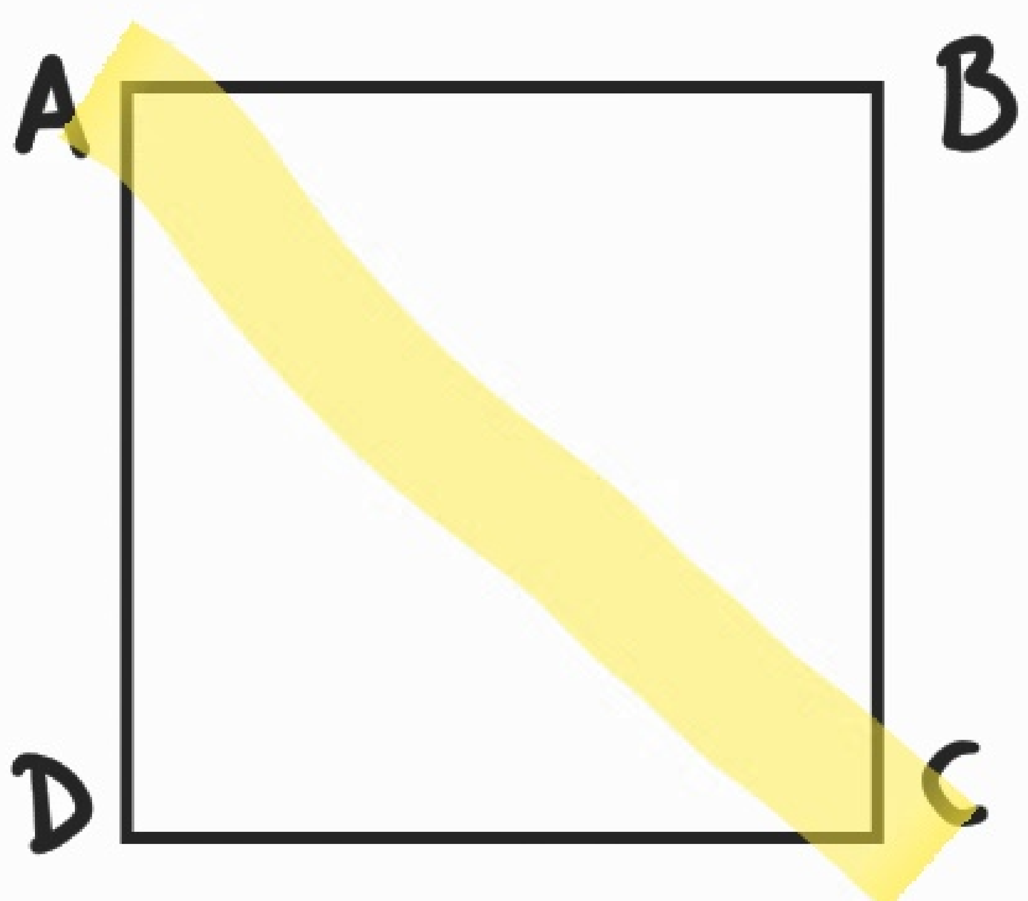
$\circ$	Id	90°	180°	270°	v	h	d	e
Id	Id	90	180	270	v	h	d	e
90°	90	180	270	Id		e		
180°	180	270	Id	90				
270°	270	Id	90	180				
v	v				Id			
h	h	d				Id		
d	d						Id	
e	e							Id

$$h \circ 90^\circ = e$$

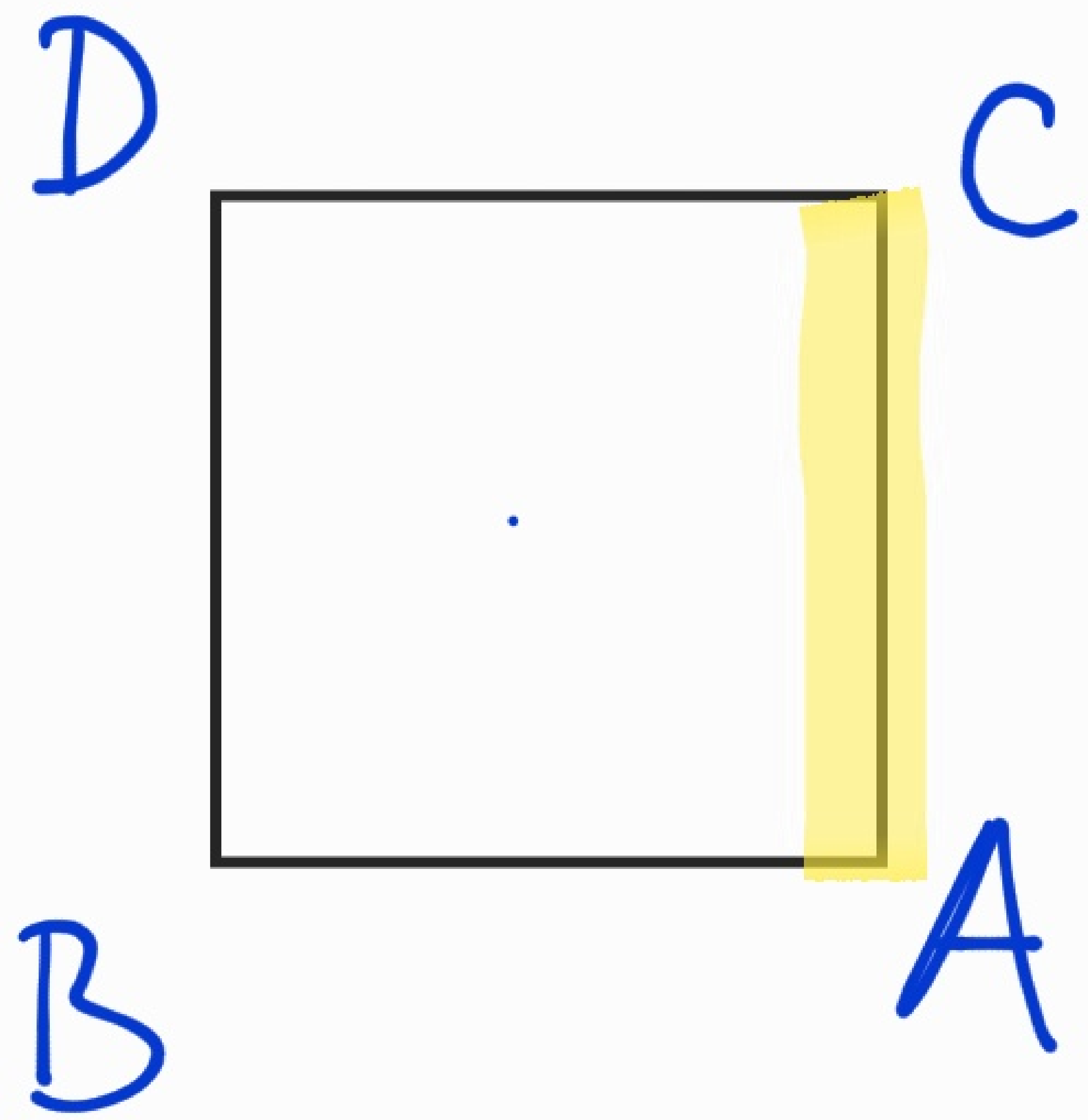


$$90^\circ \circ h = d$$

Una permutación de $X=\{A,B,C,D\}$ que no es un movimiento rigido del cuadrado.



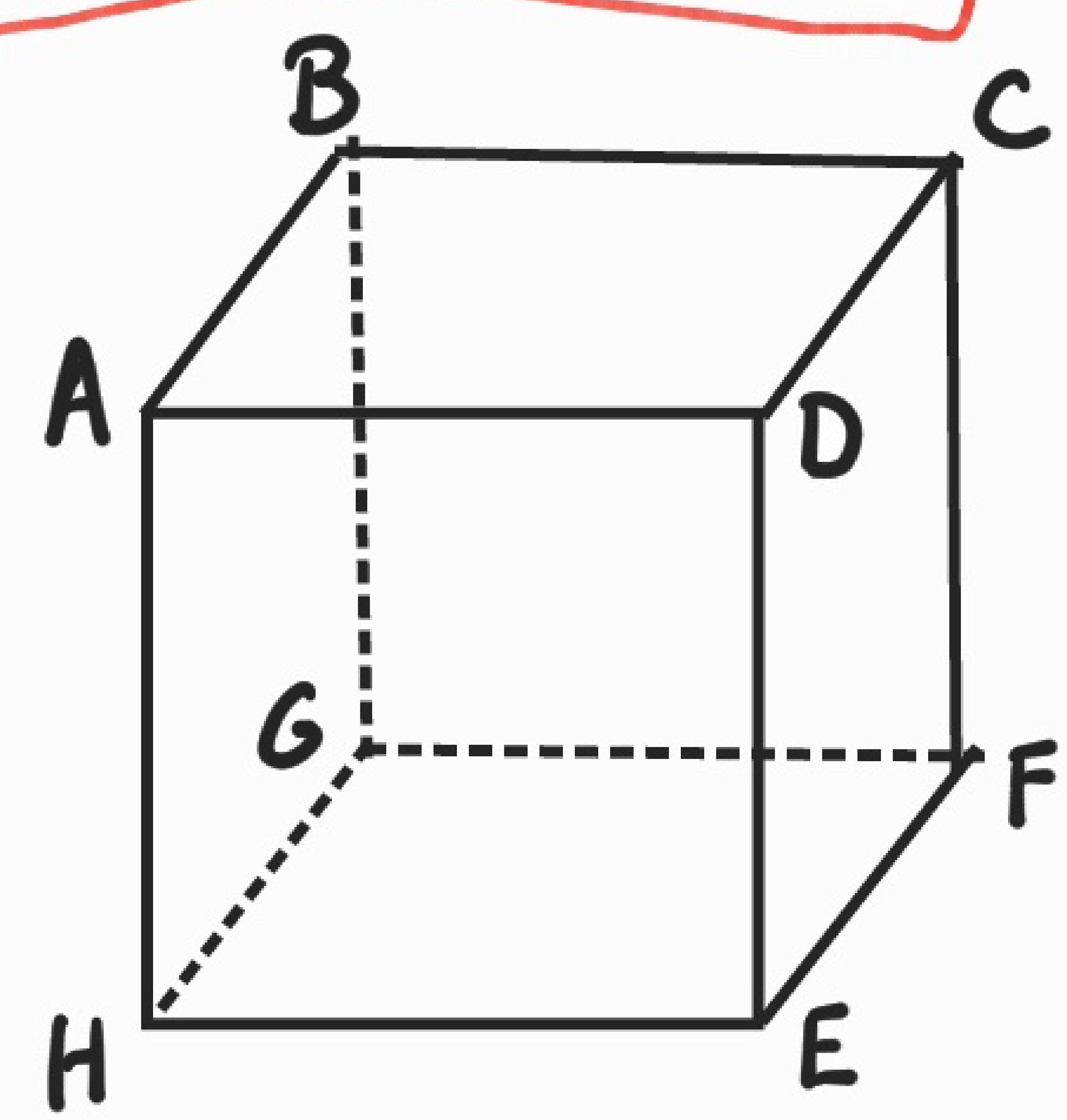
$$\begin{aligned} A &\longmapsto C \\ C &\longmapsto B \\ B &\longmapsto D \\ D &\longmapsto A \end{aligned}$$



Una congruencia del cuadrado debe preservar distancias en este caso la distancia de A a C no se preservaría.

En general, para un n-ágono regular tenemos que su grupo diedrico asociado consta de $2n$ elementos y se denota D_{2n}.

Ahora pasemos a tres dimensiones. Consideremos X el conjunto de vertices de un cubo. Queremos considerar las permutaciones de X inducidas por rotaciones. A este conjunto lo llamamos grupo de rotaciones (del cubo). y lo denotamos R.



$R \subseteq S_8$

¿Cuántos elementos tiene el grupo de rotaciones del cubo?

$$|R| = 6(4) = 24$$

Podemos preguntarnos por el conjunto de todas las permutaciones que dejan fijo al cubo. A este conjunto se le llama el grupo total de simetrias (del cubo).

Este grupo tiene 48 elementos, 24 dados por el grupo de rotaciones y 24 permutaciones más en las que estan incluidas

6 reflexiones respecto a planos que contienen aristas opuestas

3 reflexiones respecto a planos paralelos a caras opuestas

1 dada por puntos antipodas

y otras más dificiles de visualizar

Otros ejemplos:

•) Sea V un espacio vectorial. Tenemos el grupo general lineal $GL(V)$

$$GL(V)=\{T:V\to V \,/\, \underline{T \text{ lineal}} \text{ y biyectiva}\}\subseteq S_V$$

Si $\dim_K(V)=n$, $GL(V)\cong\{A\in M_n(K) \,/\, |A|\neq 0\}$

$$V\cong K^n,\quad GL_n(K)\subseteq S_{K^n}$$

•) En $\mathbb{R}$ consideremos "el grupo afín" de la línea.

$$G=\left\{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ \quad x\longmapsto \underline{ax+b}\end{array} \;\middle/\; a,b\in\mathbb{R}\right\}\subseteq S_{\mathbb{R}}$$

$f,g\in$

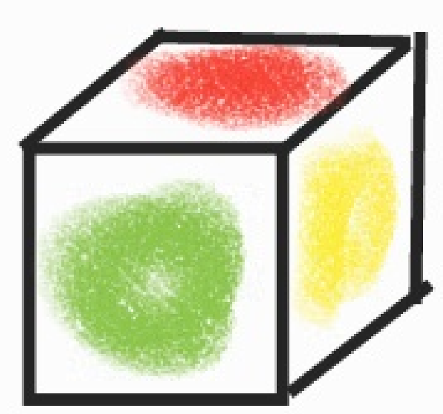
$$gf(x)=g(ax+b)=c(ax+b)+d\in G$$
$$=(ca)x+(cb+d)$$

Como último ejemplo veamos el grupo asociado al cubo de Rubik.

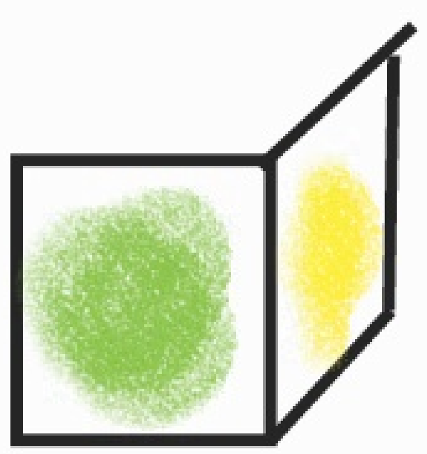
Supongamos que los cuadrados centrales del cubo se quedan fijos, los cuales son 6.

Sea G el grupo de aquellas permutaciones en los $54-6=48$ cuadrados coloreados que pueden ser realizados por una sucesion de movimientos en el cubo.

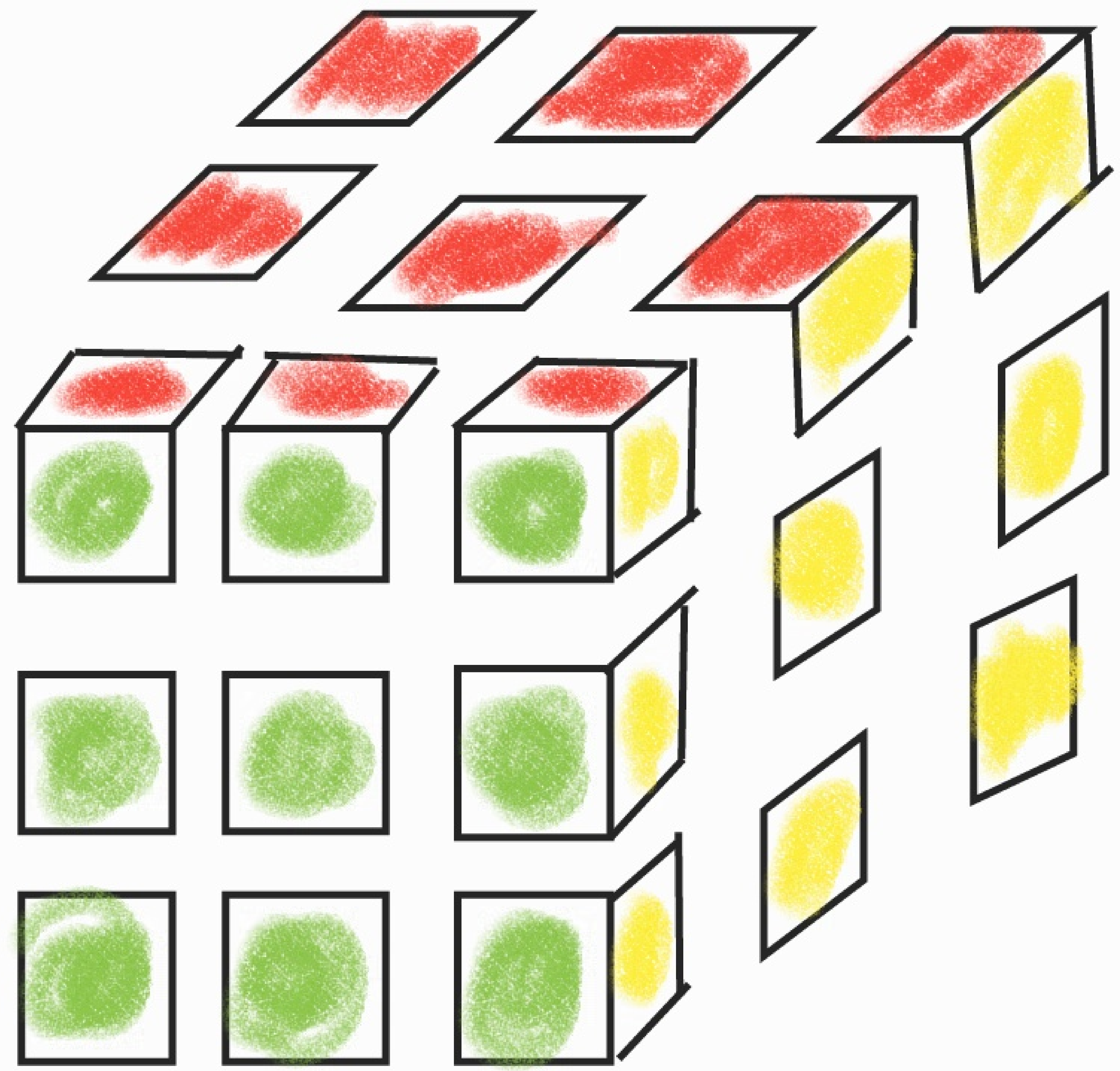
¿Cuántos elementos tiene G?



Esquinas (8) con tres cuadrados



Intermedios (12) con dos cuadrados



$$|G| = \frac{8! \cdot 12! \cdot 3^{8} \cdot 2^{12}}{12}$$

$$= \underline{43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000}$$