Def. Sea $X \subseteq G$. El normalizador de X en G es el conjunto

$$N_G(X) = \{ g \in G \mid X^g = X \}.$$

Lema: Para todo subconjunto $X \subseteq G$, $N_G(X)$ es un subgrupo de G. Si además X es subgrupo, entonces $X \subseteq N_G(X)$.

Dem:

Notemos que $e \in N_G(X)$. Si $g, h \in N_G(X)$, entonces $X^{gh} = (X^g)^h = X^h = X$. Por lo tanto $N_G(X)$ es no vacío y cerrado bajo el producto de G. Ahora, si $g, h \in N_G(X)$ por lo de arriba, $X^{gh^{-1}} = (X^g)^{h^{-1}} = X^{h^{-1}} = (X^h)^{h^{-1}} = X^{hh^{-1}} = X$. Por lo tanto $gh^{-1} \in N_G(X)$ y así $N_G(X) \leq G$.

Supongamos que $X \leq G$. Entonces, para cada $x \in X$, $X^x = x^{-1} X x = X$. Por lo tanto $X \subseteq N_G(X)$.

Cor. Sea $H \leq G$ y $N = N_G(H)$. Entonces $H \trianglelefteq N$. Dado un subgrupo K que contenga a H, $K \subseteq N$ si y solo si $H \trianglelefteq K$.

Dem:

Sea $n \in N$. Por definición, $H^n = H$. Por lo tanto, $H \triangleleft N$. Ahora sea $H \subseteq K \leq G$. $H \trianglelefteq K$ $\iff$ $H^k = H$ para todo $k \in K \iff K \subseteq N$.

Cor. Sean H y K subgrupos de G. Si $K \subseteq N_G(H)$, entonces $HK = KH$ y HK es un subgrupo de G.

Dem:

Aplicamos el corolario pasado a $H \triangleleft N_G(H)$.

Homomorfismos

Def: Sean G y H dos grupos. Una función $\varphi: G \to H$ es un homomorfismo si $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todo $x, y \in G$.

Como ejemplos, ya habiamos trabajado con los automorfismos de un grupo G, es decir, homomorfismos biyectivos de G en G.

Dados G y H grupos, siempre existe un homomorfismo 'trivial' dado por:
$\varphi: G \to H$, $\varphi(x) = e$ para todo $x \in G$.

Otro ejemplo: Sea $n > 0$ y consideremos $GL_n(K)$ con K un campo. Entonces $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Por otro lado, como K es un campo, $K^* = K \setminus \{0\}$ es un grupo con la multiplicacion. Por lo tanto, el determinante define un homomorfismo

$$\det : GL_n(K) \to K^*$$