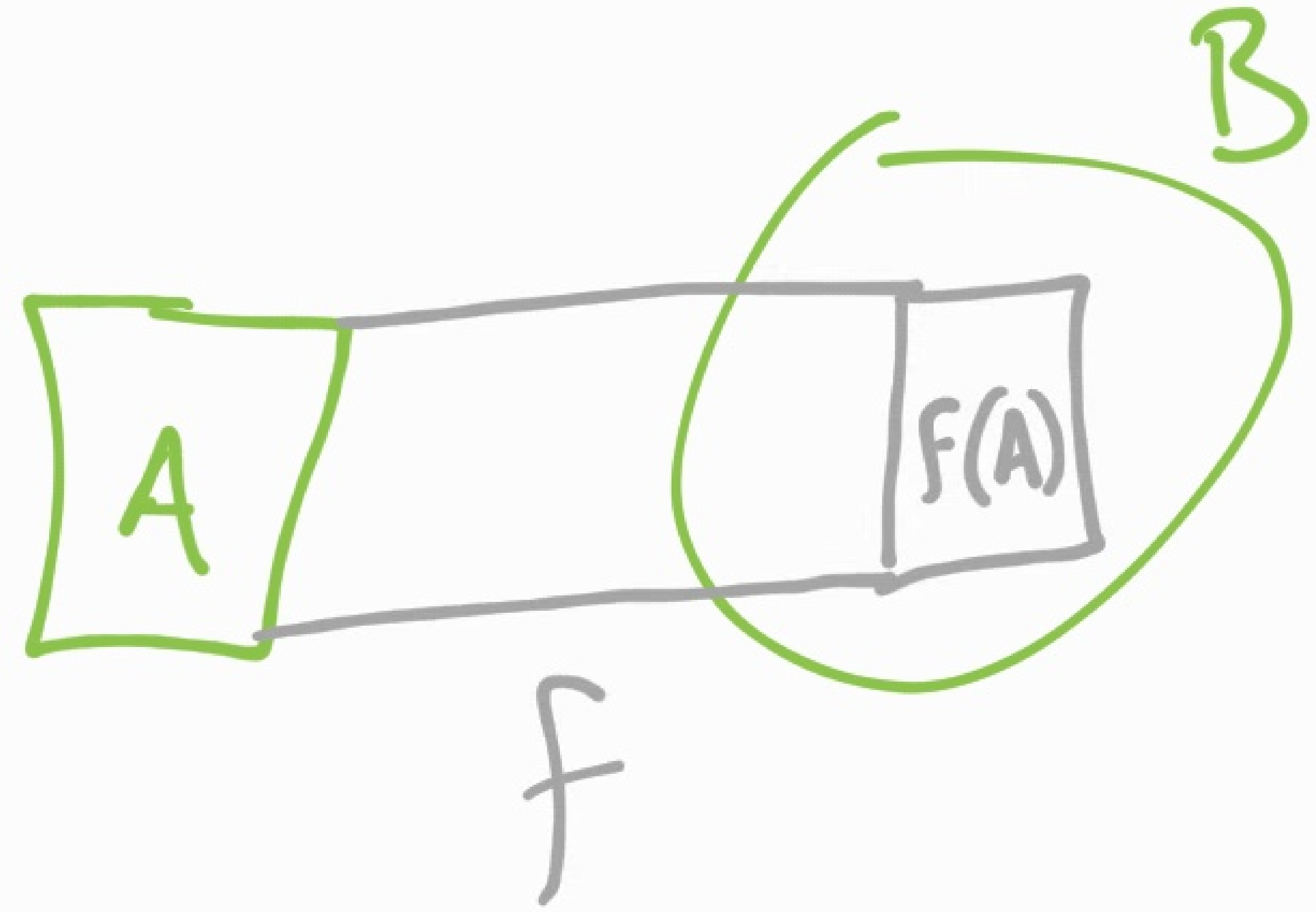
Teoria de Grupos. Una motivación

Funciones: Dados dos conjuntos A y B, la notación $f: A \to B$ se entenderá como "f es una función de A en B" y escribiremos $f(a)$ a la aplicación de f en el elemento $a \in A$.

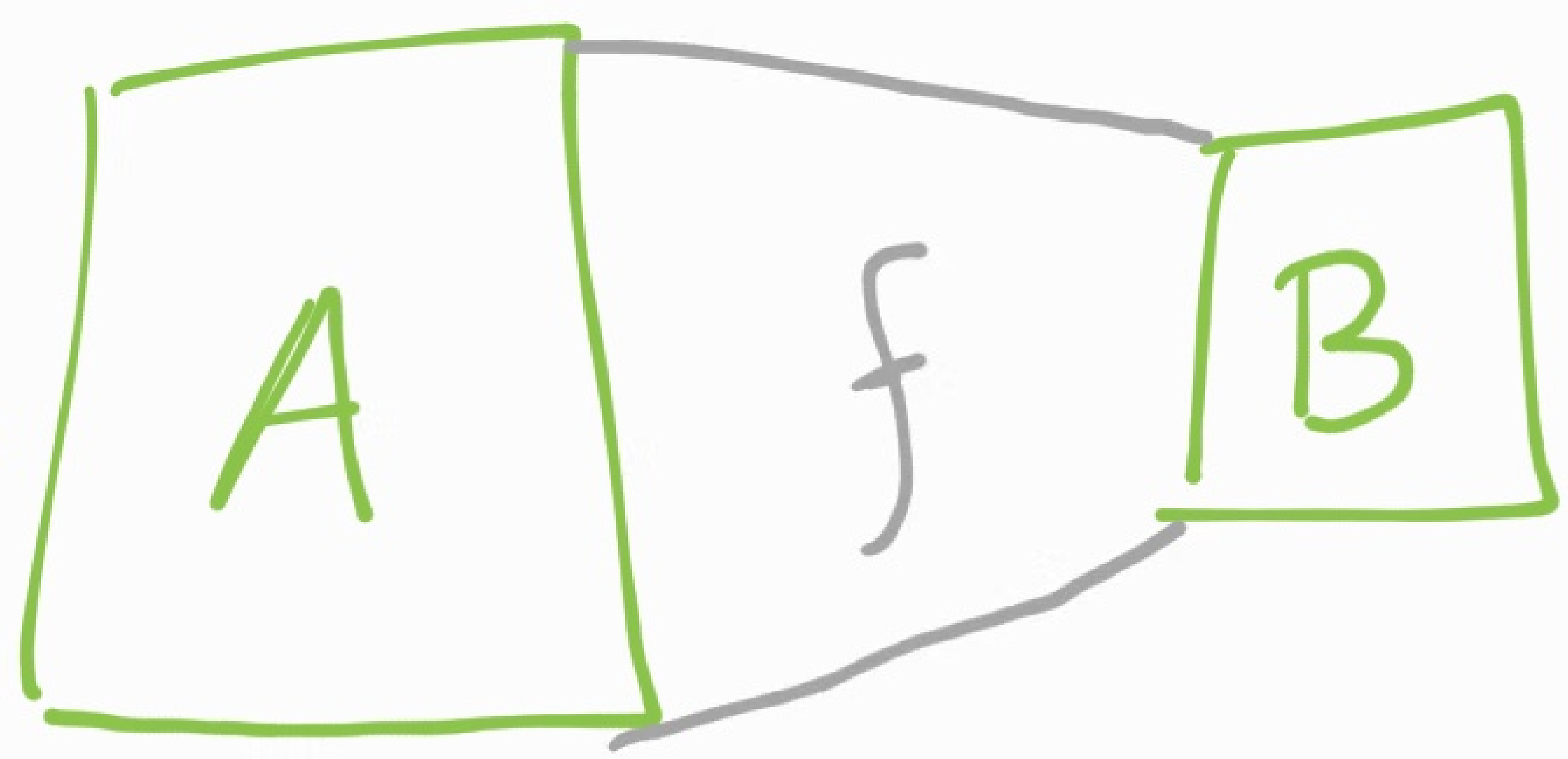
Funcion inyectiva $f: A \rightarrowtail B$:

$\forall a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$ ent $a = a'$



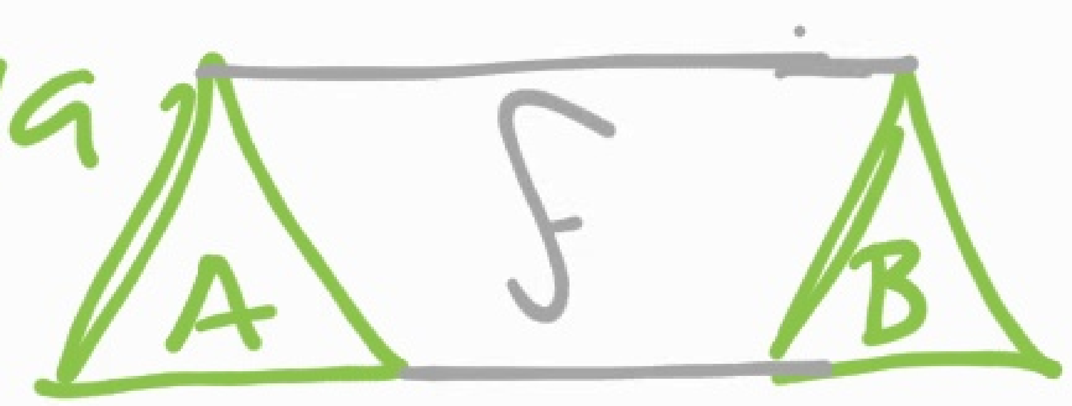
Funcion suprayectiva $f: A \twoheadrightarrow B$

$\forall b \in B \; \exists a \in A$ y. $f(a) = b$



Función Biyectiva $f: A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$ $\quad (A \underset{f}{\cong} B)$

f es inyectiva y es suprayectiva



Lema: Sea $f: A \to B$.

(1) f es inyectiva si y solo si existe $h: B \to A$ tal que $hf = Id_A$

(2) f es suprayectiva si y solo si existe $g: B \to A$ tal que $fg = Id_B$

(3) Si f es biyectiva, entonces las funciones h y g anteriores están totalmente determinadas y coinciden.

(1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[l, dashed, bend right, "h"'] \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \arrow[l, dashed, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Dem:

(1) Sup. $f: A \to B$ inyectiva. Sea $\underline{x \in A}$ fijo

$$h(b) = \begin{cases} a & \text{si } f(a) = b \\ x & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \therefore \quad hf = Id_A$$

(2) Sea $f: A \to B$ suprayectiva. Definimos

$g: B \to A$ como $g(b) = a$ tal que

$f(a) = b$ el cual existe porque la

función f es suprayectiva.

Para la eleccion del elemento $a \in A$ tenemos que hacer uso del Axioma de Eleccion.

Por lo tanto $fg = Id_B$

(3) Ahora si $f: A \to B$ es biyectiva

$\exists h \; \ni \; hf = I_A \Rightarrow (hf)g = g = h(fg)$

g tal que $fg = Id_B$ $\therefore$ $\underline{h = g}$ //.

En el caso (1) del lema anterior decimos que f tiene un inverso izquierdo

En el caso (2) del lema anterior decimos que f tiene un inverso derecho

En el caso (3) del lema anterior decimos que f tiene exactamente un inverso.

Pensemos solo en un conjunto X y consideremos el conjunto de todas las funciones de X en X, ie, $Fun(X)=\{f: X\to X\}$. En $Fun(X)$ tenemos la composición de funciones, es decir, si $f, g\in Fun(X)$ entonces $g\circ f\in Fun(X)$. Así tenemos una función

$$\circ : Fun(X)\times Fun(X) \longrightarrow Fun(X)$$

que cumple $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

Quedémonos solo con el conjunto de funciones biyectivas de X el cual denotaremos por S_X. A este conjunto se le suele llamar el grupo simétrico en X y a sus elementos se les conoce como permutaciones. Si X es finito digamos con n elementos, escribimos S_n y S_n tiene $n!$ elementos.

Prop. Sea $G = S_X$.

(1) $Id_X \in G$

(2) $f^{-1} \in G$ para todo $f \in G$

(3) $g \circ f \in G$ para todo $f, g \in G$.

Def: Sea X un conjunto. Un grupo de permutaciones en X es un subconjunto no vacío $G \subseteq S_X$ tal que

(1) $g^{-1} \in G$ para cada $g \in G$, y

(2) G es cerrado bajo la composición de funciones.

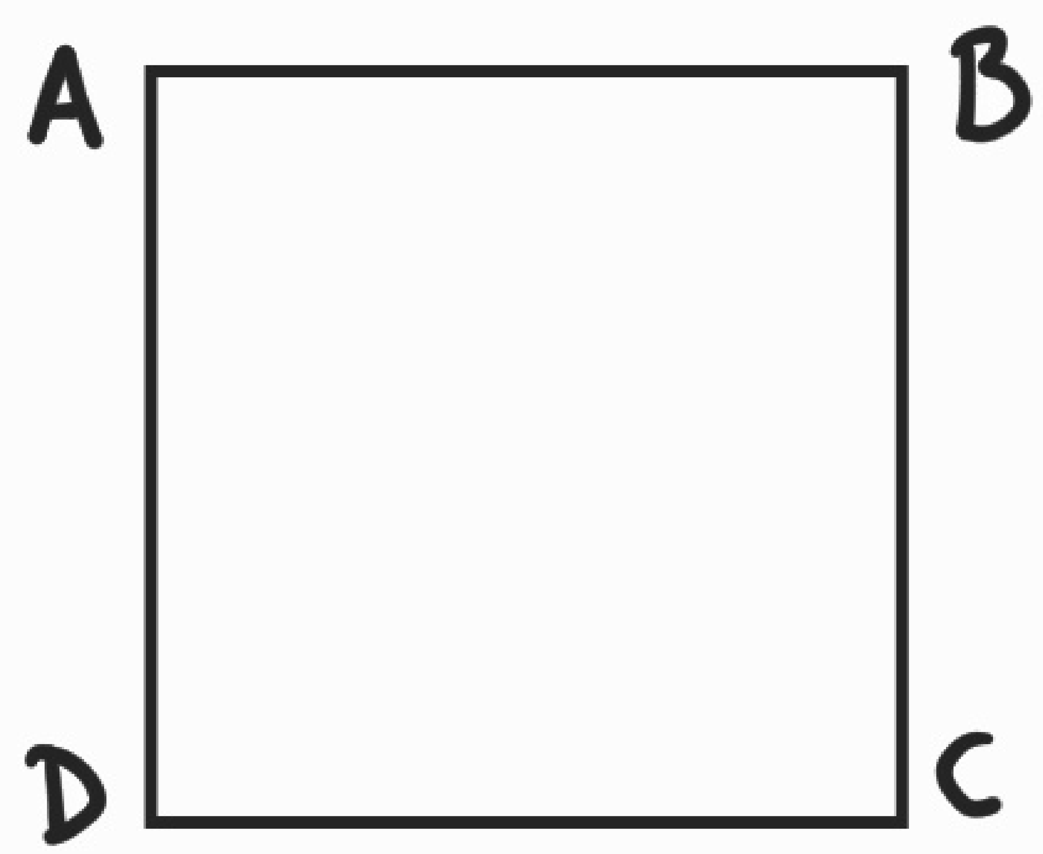
Notemos que dado un grupo de permutaciones G en X, se tiene que $Id_X \in G$. Ya que existe $g \in G$ y por (1) $g^{-1} \in G$, así que

$$g g^{-1} = Id_X \in G \text{ por } (2).$$

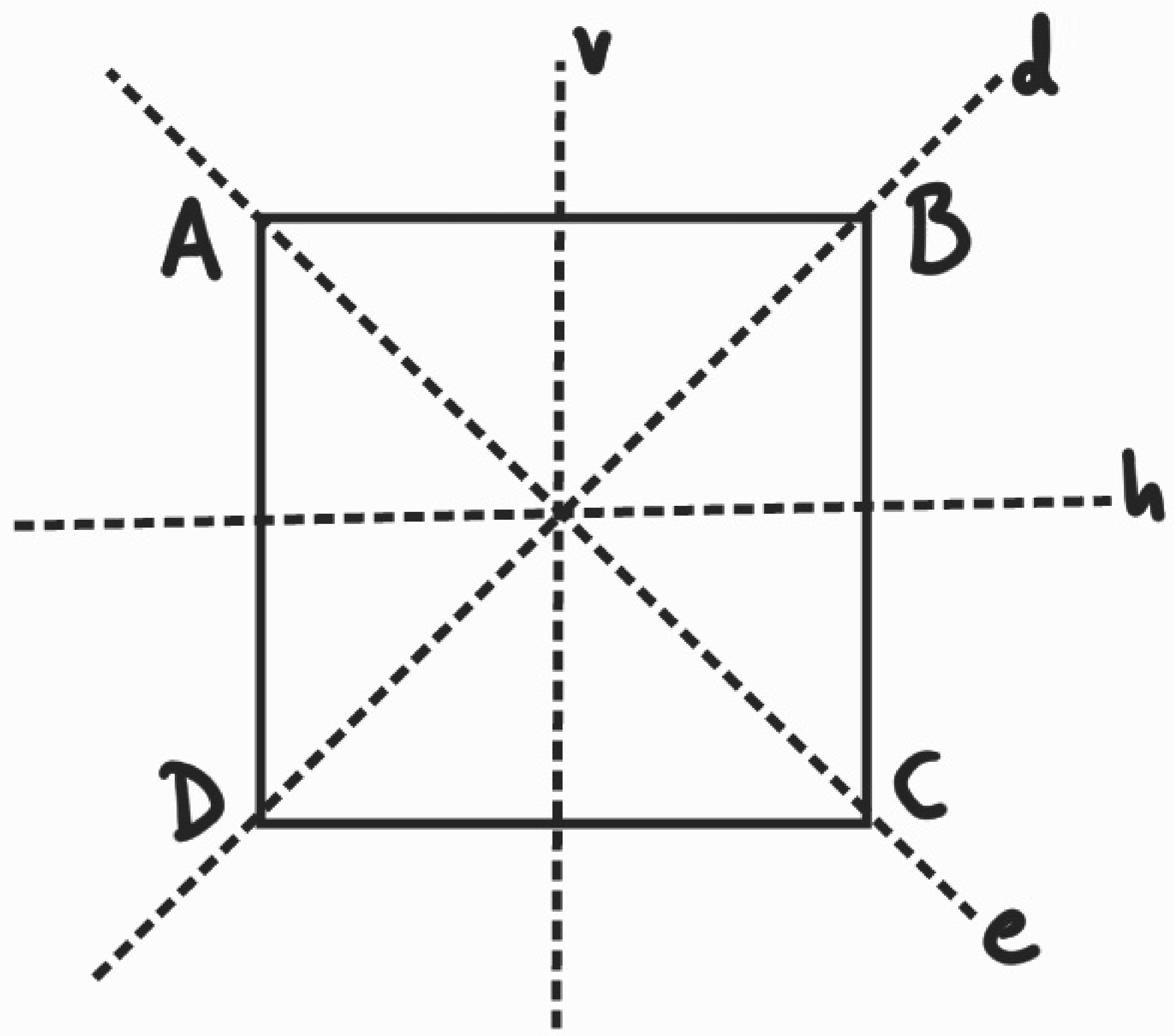
Ejemplos de grupos de permutaciones:

Los triviales: $\{Id_X\}$, S_X

Consideremos un cuadrado y $X=\{A,B,C,D\}$ su conjunto de vertices



Dentro de S_X, sea G el conjunto de permutaciones que pueden ser realizadas por movimientos del cuadrado en el espacio. Es decir los movimientos en el espacio del cuadrado que fijan al cuadrado.



Por ejemplo la rotcion del cuadrado 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj está funcion $A \mapsto D \mapsto C \mapsto B \mapsto A$. Tambien tenemos las rotaciones de 180° y 270°

Tambien, podemos girar el cuadrado respecto al eje vertical v que nos da la función

$A \mapsto B \quad B \mapsto A$

$D \mapsto C \quad C \mapsto D$

¿Cuántos elementos tiene G?

$$\boxed{|G| = 8}$$

A G se le llama el grupo diedrico de 8 elementos.

Usualmente se le denota D_8