Teorema.

Sea G finito y $S \in Syl_p(G)$. Escojamos $T \in Syl_p(G)$ tal que $S \cap T$ es minima. Supongamos que $N \subseteq T \cap S$ y cumple que $N \trianglelefteq S$ y $N \trianglelefteq T$. Entonces $N \subseteq core_G(S)$.

Dem:

Como $core_G(S) = \bigcap_{g \in G} S^g = \bigcap Syl_p(G)$, tenemos que ver que $N \subseteq P$ para todo $P \in Syl_p(G)$. Fijemos $P \in Syl_p(G)$. Sea $M = N_G(N)$ y notemos que $T \subseteq M$ y así $T \in Syl_p(M)$. Se sigue que $(P \cap M)^m \subseteq T$ para algun $m \in M$, así que $P^m \cap M \subseteq T$. Como $S \subseteq M$,

$$P^m \cap S = P^m \cap M \cap S \subseteq T \cap S.$$ Por la eleccion de $S \cap T$, $P^m \cap S = S \cap T \supseteq N$ y así $N \subseteq P^m$. Finalmente, como $m \in M = N_G(N)$, $N = N^{m^{-1}} \subseteq P$.

Teorema.

Sea G finito y supongamos que $S \in Syl_p(G)$ es abeliano. Entonces existe $T \in Syl_p(G)$ con $S \cap T = core_G(S)$.

Dem:

Escojamos $T \in Syl_p(G)$ tal que $S \cap T$ es mínima y sea $N = S \cap T$. Como S y T son conjugados en particular son isomorfos, así que T también es abeliano. Por lo tanto $N \trianglelefteq S$ y $N \trianglelefteq T$. Por el teorema anterior, $N \subseteq core_G(S)$. Sin embargo como T es uno de los conjugados de S, $core_G(S) \subseteq S \cap T = N$. Por lo tanto $N = core_G(S) \trianglelefteq G$.