Teorema

Sea $H < P$ con P un p-grupo finito. Entonces $H < N_P(H)$.

Dem:

Es claro que $Z(P) \subseteq N_P(H)$, así que si $Z(P) \nsubseteq H$ entonces $H < N_P(H)$. Supongamos que $Z(P) \subseteq H$. Tenemos que $H/Z(P) < P/Z(P)$ y como $Z(P) \neq e$, $P/Z(P)$ es un p-grupo más chico que P. Si hacemos inducción sobre $|P|$ la hipotesis de inducción nos dice que $H/Z(P) < N_{P/Z(P)}(H/Z(P)) = M/Z(P)$ con $Z(P) < M \leq P$ por el Teorema de la correspondencia. Como $H/Z(P) \trianglelefteq M/Z(P)$, $H \trianglelefteq M$, además $H/Z(P) < M/Z(P)$ así que $H < M$

Por lo tanto $H < M \subseteq N_P(H)$.

Cor. Sea P un p-grupo finito. Entonces todo subgrupo maximo de P tiene indice p y es normal en P.

Dem:

Sea $H < P$ un subgrupo maximo de P. Por el teorema anterior, $H < N_P(H)$. Por lo tanto $N_P(H) = P$ y así $H \trianglelefteq P$. Ahora, por el teorema de la correspondencia el grupo P/H no tiene subgrupos no triviales, así que debe tener orden primo. En este caso $[P : H] = |P/H| = p$.

Teorema

Sea $|G| = p^\ell q$ con p y q primos y $\ell > 0$. Entonces G no es simple.

Dem:

Podemos suponer que $q \neq p$ y $n_p(G) = q$. Consideremos primero el caso en el cual la intersección de cualquier par de p-subgrupos de Sylow es trivial. Entonces podemos contar el número de elementos, distintos del neutro que están en los p-subgrupos de Sylow de G y estos son $q(p^\ell - 1)$. Ahora, si consideramos X el conjunto de los elementos que aún no hemos contado, $|X| = |G| - q(p^\ell - 1) = q$. Lo cual me da espacio para un solo q-subgrupo de Sylow de G. Así que G no es simple.

Ahora, supongamos que existen $S \neq T \in Syl_p(G)$ tales que $S \cap T \neq e$. Escojamos S y T de tal manera que $S \cap T$ sea lo más grande posible y pongamos $N = N_G(S \cap T)$. Como $S \cap T < S$ y $S \cap T < T$, por el teorema anterior $S \cap T < S \cap N$ y $S \cap T < T \cap N$.

Si N es un p-grupo, entonces $N \subseteq P$ para algún $P \in Syl_p(G)$ y así $S \cap P \supseteq S \cap N > S \cap T$. Por la elección de S y T, $S = P$. De la misma forma llegamos a que $T = P$. Por lo tanto $S = T$ ↯.

Entonces N no es un p-grupo y así $q \mid |N|$. Sea $Q \in Syl_q(N)$. Como $|SQ| = \frac{|S||Q|}{|S \cap Q|} = \frac{p^\ell q}{1} = p^\ell q = |G|$ y $SQ \subseteq G$, se sigue que $SQ = G$. Si $g \in G$, entonces $g = xy$ con $x \in S$ y $y \in Q$.

Así $S^g = S^{xy} = (S^x)^y = S^y \supseteq (S \cap T)^y = S \cap T$ ya que $y \in Q \subseteq N$. Por lo tanto

$e \neq S \cap T \subseteq \bigcap_{g \in G} S^g = core_G(S) \trianglelefteq G$ y G no es simple.