Cuarta tarea y cuarto examen parcial de Algebra Moderna 1

Prof. Mauricio Medina

Este examen se dejará como *tarea-examen.* La forma de entregar los ejercicios es la siguiente:
Si tu número de cuenta termina en par, entonces entregarás los ejercicios marcados con un $*$.
Si tu número de cuenta termina en impar, entonces entregarás los ejercicios marcados con una $\star$.
La entrega de esta tarea-examen será el día *15 de junio de 2022.*

1. $*$ Demuestra que A_5 es el único grupo simple de orden 60.

   Hint: Muestre que si $|G| = 60$ entonces G tiene un subgrupo de índice 5. Si $n_2(G) = 5$, se sigue el resultado. Suponga que $n_2(G) = 15$. Demuestre que existe una intersección de dos 2-subgrupos de Sylow $D = S \cap T$ con $|D| = 2$. Consider $N_G(D)$.

2. Considere el siguiente subconjunto de S_4:

$$\mathbb{V} = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

   a) Demuestre que $\mathbb{V}$ es un subgrupo normal de S_4.
   b) Demuestre que $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$ es normal en $\mathbb{V}$ pero no en S_4.
   c) Demuestre que $\mathbb{V} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

   Nota: Al grupo $\mathbb{V}$ se le conoce como el *grupo de Klein.*

3. Si α, $\beta \in S_n$ son permutaciones disjuntas y $\alpha\beta = 1$, entonces $\alpha = 1 = \beta$.

4. Muestre que una potencia de un ciclo no necesariamente es un ciclo.

5. Si α es un n-ciclo, entonces α^k es un producto de (n, k) ciclos disjuntos, cada uno de longitud $\frac{n}{(n,k)}$.

6. $*$ Sea $\alpha \in S_n$ un n-ciclo. Demuestre que $C_{S_n}(\alpha) = \langle\alpha\rangle$.

   Hint: Qué tan grande es la clase de conjugación de α?

7. Muestre que $S_n = \langle(1\ 2), (1\ 2\ 3\ ...\ n)\rangle$.

8. $*$ Si p es un primo, entonces toda potencia de un p-ciclo es un p-ciclo o (1).

9. $\star$ Sea p un primo y $\alpha \in S_n$. Si $\alpha^p = 1$, entonces $\alpha = (1)$, α es un p-ciclo o α es un producto de p-ciclos disjuntos.

10. Suponga que p es primo y que $\alpha, \beta \in S_p$ donde α es una transposición y β con orden p. Muestre que $\langle \alpha, \beta \rangle = S_p$.

    Hint: Muestre que si reacomodamos los puntos y remplazamos β por un a potencia de ella, entonces estamos en la situación del ejercicio 27.

11. Muestre que S_n es isomorfo a un subgrupo de A_{n+2} pero S_n no puede ser isomorfo a un subgrupo de A_{n+1} para $n \geq 2$.

12. $\star$ Demuestre que los únicos subgrupos normales de S_4 son $\{1\}$, $\mathbb{V}$, A_4 y S_4.

13. Demuestre que S_5 no contiene subgrupos de orden 40 ni de orden 30.

14. Demuestre que si $G \leq S_n$ es un subgrupo que contiene una permutación impar entonces $|G|$ es par y exactamente la mitad de los elementos de G son permutaciones impares.

15. $\star$ Sea G un subgrupo de S_n.

    a) Demuestre que si $G \cap A_n = \{1\}$, entonces $|G| \leq 2$.

    b) Demuestre que si G es simple con más de dos elementos, entonces $G \subseteq A_n$.

16. Demuestre que si $Z(A_n) > 1$, entonces $n = 3$.

17. Pruebe que si $(m, n) = 1$ entonces $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. (Hint: Use el teorema chino del residuo).

18. Si p es un primo, pruebe que $\mathbb{Z}_{p^2} \ncong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

19. $*$ Sea G un grupo con un subgrupo H simple de indice 2. Pruebe que H es el unico subgrupo normal propio de G o que G contiene un subgrupo normal K de orden 2 con $G \cong H \times K$. (Hint: Use el segundo teorema de isomorfismo).

20. $\star$ Sean U y V dos grupos simples no abelianos. Demuestre que $G = U \times V$ tiene exactamente cuatro subgrupos normales diferentes.

21. Sean $N_1, .., N_\ell$ subgrupos normales de un grupo G y sea $H = \bigcap_{i=1}^{\ell} N_i$. Demuestre que G/H es isomorfo a producto directo $G/N_1 \times \cdots \times G/N_\ell$.

22. El *Zoclo* de un grupo se define como el producto de todos sus subgrupos normales mínimos. Muestre que el zoclo de un grupo finito es un producto directo de grupos simples.

23. $*$ Sea G un grupo. Demuestra que G tiene un único p-subgrupo de Sylow para cada primo p divisor de $|G|$ si y solo si G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

24. $\star$ Demuestra que los 2-subgrupos de Sylow de S_6 son isomorfos a $D_8 \times \mathbb{Z}_2$.

   Hint: Usa que los 2-subgrupos de Sylow de S_4 son isomorfos a D_8.