ALGEBRA MODERNA 1
TAREA 3

Esta tarea comprende las secciones 1.4 y 3.4 del temario de la facultad.

1. Sea G un grupo finito y supongamos que $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo suprayectivo.
   a) Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, muestre que $\varphi(P) \in \mathrm{Syl}_p(H)$.
   b) Si $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, muestre que $Q = \varphi(P)$ para algún $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
   c) Muestre que $n_p(H) \leq n_p(G)$.
2. Sea $H \leq G$ con G finito. Muestre que $n_p(H) \leq n_p(G)$.
3. Sea G un grupo finito y sea $H \leq G$ tal que $C_G(x) \subseteq H$ para todo $e \neq x \in H$. Muestre que $mcd(|H|, [G : H]) = 1$.
   Hint: Tome un $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ y muestre que $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
   Nota: Un subgrupo de G que su orden es primo relativo con su índice es llamado un *subgrupo de Hall de G*.
4. Sea $H \leq G$ con G finito y suponga que $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Si $N_G(P) \subseteq H$, muestre que $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
5. Sea $H \lhd G$. Si G es un p-grupo y $H \neq e$ entonces $H \cap Z(G) \neq e$.
6. Sea G un p-grupo no abeliano de orden p^3. Demuestra que $|Z(G)| = p$ y que $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2$.
7. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que si $H \lhd G$ entonces $P \cap H$ es un p-subgrupo de Sylow de H.
8. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que si $H \lhd G$ entonces HP/H es un p-subgrupo de Sylow de G/H.
9. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que si $H \leq G$ y $P \lhd G$ entonces $H \cap P$ es el único p-subgrupo de Sylow de H.
10. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$
11. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que para cada $H \leq G$ existe $a \in G$ tal que $aPa^{-1} \cap H$ es un p-subgrupo de Sylow de H.
12. Calcula los 2-subgrupos de Sylow de S_4 y demuestra que son isomorfos a D_8.
13. Demuestra que no hay grupos simples de orden 56.
14. Demuestra que no hay grupos simples de orden 312.

15. Demuestra que no hay grupos simples de orden 6545.
16. Calcula el número de elementos de orden 7 en un grupo simple de orden 168.
17. Sea G un grupo de orden 30. Demuestra que G tiene un subgrupo normal isomorfo a $\mathbb{Z}_{15}$.
18. Sea $|G| = p^2q^2$ donde $p > q$ son primos. Si $|G| \neq 36$, muestre que G tiene un p-subgrupo Sylow normal.
19. Demuestra que A_5 es el único grupo simple de orden 60.
    Hint: Muestre que si $|G| = 60$ entonces G tiene un subgrupo de índice 5. Si $n_2(G) = 5$, se sigue el resultado. Suponga que $n_2(G) = 15$. Demuestre que existe una intersección de dos 2-subgrupos de Sylow $D = S \cap T$ con $|D| = 2$. Consider $N_G(D)$.
20. Demuestra que si p, q son primos entonces no existen grupos simples de orden pq.
21. Sea G un grupo finito en el cual todo subgrupo de Sylow es normal.
    a) Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, muestre que $Z(P) \subseteq Z(G)$.
    b) Si $e \neq N \triangleleft G$, muestre que $N \cap Z(G) \neq e$.

    Nota: A un grupo que satisface la hipótesis de este ejercicio se le llama *nilpotente.*
22. Considere el siguiente subconjunto de S_4:

    $$\mathbb{V} = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

    a) Demuestre que $\mathbb{V}$ es un subgrupo normal de S_4.
    b) Demuestre que $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$ es normal en $\mathbb{V}$ pero no en S_4.
    c) Demuestre que $\mathbb{V} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

    Nota: Al grupo $\mathbb{V}$ se le conoce como el *grupo de Klein.*
23. Si α, $\beta \in S_n$ son permutaciones disjuntas y $\alpha\beta = 1$, entonces $\alpha = 1 = \beta$.
24. Muestre que una potencia de un ciclo no necesariamente es un ciclo.
25. Si α es un n-ciclo, entonces α^k es un producto de (n, k) ciclos disjuntos, cada uno de longitud $\frac{n}{(n,k)}$.
26. Sea $\alpha \in S_n$ un n-ciclo. Demuestre que $C_{S_n}(\alpha) = \langle\alpha\rangle$.
    Hint: Qué tan grande es la clase de conjugación de α?
27. Muestre que $S_n = \langle(1\ 2), (1\ 2\ 3\ ...\ n)\rangle$.

28. Si p es un primo, entonces toda potencia de un p-ciclo es un p-ciclo o (1).
29. Sea p un primo y $\alpha \in S_n$. Si $\alpha^p = 1$, entonces $\alpha = (1)$, α es un p-ciclo o α es un producto de p-ciclos disjuntos.
30. Suponga que p es primo y que $\alpha, \beta \in S_p$ donde α es una transposición y β con orden p. Muestre que $\langle \alpha, \beta \rangle = S_p$.
    Hint: Muestre que si reacomodamos los puntos y remplazamos β por un a potencia de ella, entonces estamos en la situación del ejercicio 27.
31. Muestre que un r-ciclo es par si y solo si r es impar.
32. Si $n > 2$, entonces A_n es generado por todos los 3-ciclos. (Hint: $(ij)(jk) = (ijk)$ y $(ij)(kl) = (ijk)(jkl)$).
33. Muestre que S_n es isomorfo a un subgrupo de A_{n+2} pero S_n no puede ser isomorfo a un subgrupo de A_{n+1} para $n \geq 2$.
34. Demuestre que los únicos subgrupos normales de S_4 son $\{1\}$, $\mathbb{V}$, A_4 y S_4.
35. Demuestre que para $n \geq 5$, los únicos subgrupos normales de S_n son $\{1\}$, A_n y S_n.
36. Demuestre que para $n \geq 3$, A_n es el único subgrupo de S_n de orden $\frac{1}{2}n!$.
37. Demuestre que S_5 no contiene subgrupos de orden 40 ni de orden 30.
38. Demuestre que si $G \leq S_n$ es un subgrupo que contiene una permutación impar entonces $|G|$ es par y exactamente la mitad de los elementos de G son permutaciones impares.
39. Sea G un subgrupo de S_n.
    a) Demuestre que si $G \cap A_n = \{1\}$, entonces $|G| \leq 2$.
    b) Demuestre que si G es simple con más de dos elementos, entonces $G \subseteq A_n$.
40. Demuestre que si $Z(A_n) > 1$, entonces $n = 3$.