ALGEBRA MODERNA 1
TAREA 2

Esta tarea comprende las secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 3.3 del temario de la facultad.

1. Sea $f : X \to Y$ una biyección entre dos conjuntos. Demuestre que $\varphi : S_X \to S_Y$ definido como $\varphi(\alpha) = f \circ \alpha \circ f^{-1}$ es un isomorfismo.
2. Describe todos los homomorfismos de $\mathbb{Z}_{12}$ es si mismo. ¿Cuántos de estos son ismorfismos?
3. Sea X un subconjunto de un conjunto Y. Demuestre que S_X es isomorfo a un subgrupo de S_Y.
4. Pruebe que todo grupo G de orden 4 es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{V}$. Concluya que todo grupo de orden ≤ 5 es abeliano.
5. Sea $a \in G$ de orden finito y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo, entonces el orden de $\varphi(a)$ divide al orden de a.
6. Sea $\varphi : G \to K$ un homomorfismo y sea $H \leq G$. Demuestre que $[\varphi(G) : \varphi(H)]$ divide a $[G : H]$ y que $|\varphi(H)|$ divide a $|H|$.

   Definición: Sea $\mathbb{P}$ un subconjunto de números primos. Un grupo finito G es un $\mathbb{P}$-grupo si cada primo que divide a $|G|$ está en $\mathbb{P}$.
7. Sea G un grupo finito y $\mathbb{P}$ un conjunto de primos.
   - Muestre que G tiene un único subgrupo normal N, mínimo con la propiedad de que G/N es un $\mathbb{P}$-grupo.
   - Sea $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica. Muestre que cualquier homomorfismo φ de G en un $\mathbb{P}$-grupo se factoriza a través de π.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

8. Sea $N \lhd G$ y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo tal que $N \cap \ker \varphi = e$. Sea $x \in N$. Demuestre que $\varphi(C_G(x)) = C_H(\varphi(x))$.
9. Sea H un subgrupo de G. Muestre que $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.
10. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo con G finito. Suponga que $h \in H$ es un elemento con orden una potencia de un primo p.

Demuestre que hay un elemento $g \in G$ de orden una potencia de p tal que $\varphi(g) = h$.

11. Sea G un grupo infinito.
    a) Demuestre que todo $e \neq g \in G$ tiene una cantidad infinita de conjugados.
    b) Demuestre que todo subgrupo propio $e \neq H < G$ tiene una cantidad infinita de conjugados.
12. Demuestre que si G es un grupo finito de orden impar, entonces solo el neutro e es conjugado a su inverso.
13. Demuestre que si H es un subgrupo propio de un grupo finito G, entonces $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.
14. Demuestre que $C_G(gxg^{-1}) = gC_G(x)g^{-1}$ para todo $g, x \in G$.
15. Sea H un subgrupo de un grupo G.
    a) Demuestre que $C_H(x) = H \cap C_G(x)$ para todo $x \in H$.
    b) Suponga que G es finito y que $[G : H] = 2$. Para $x \in H$, demuestre que $|x^H| = |x^G|$ o $|x^H| = \frac{1}{2}|x^G|$, donde x^H es la clase de conjugación de x en H.
16. Sea G un grupo que actua sobre un conjunto X. Sean $x, y \in X$ con $y = gx$ para algún $g \in G$. Demuestre que $G_y = gG_xg^{-1}$. Conluya que $|G_x| = |G_y|$.
17. Sean G un grupo, X un conjunto y $\alpha : G \times X \to X$ una acción. Sea $\overline{\alpha} : G \to S_X$ el homomorfismo definido como $\overline{\alpha}(g)(x) = gx$.
    a) Sea $K = \ker \overline{\alpha}$. Demuestre que la función $\widehat{\alpha} : G/K \times X \to X$ dada por $\widehat{\alpha}(gK, x) = gx$ define una acción de G/K sobre X.
    b) Demuestre que si α es una acción transitiva, entonces $\widehat{\alpha}$ también lo es.
    c) Demuestre que si α es transitiva, entonces $|K| \leq |G|/|X|$. *Hint:* Si $x \in X$, entonces $|\mathcal{O}(x)| = [G : G_x] \leq [G : K]$.
18. Sea p un número primo y G un p-grupo. Demuestre que si G actua sobre un conjunto finito X, entonces $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$, donde $X_G = \{x \in X \mid gx = x \text{ para todo } g \in G\}$.
19. Sea G un grupo finito que actua transitivamente en un conjunto X. Considere la acción de G en $X \times X$ dada por $g(x, y) = (gx, gy)$. Sea $x \in X$. Demuestre que G tiene el mismo número de orbitas en $X \times X$ que G_x en X.

20. Sean H y K subgrupos finitos de un grupo G. Muestre que $|HgK| = |H||K|/|K \cap H^g|$.
21. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo con G finito. Demuestre que $|C_G(g)| \geq |C_H(\varphi(g))|$. *Hint:* Muestre que la clase de conjugación de g en la imagen inversa en G de $C_H(\varphi(g))$ tiene tamaño menor igual a $|\ker \varphi|$.