ALGEBRA MODERNA 1
TAREA 1

Esta tarea comprende las secciones 1.1, 1.2, 1.3, 1.5 y 1.6 del temario de la facultad.

1. Sea G un conjunto y $*$ una operación binaria asociativa en G. Entonces, G es un grupo si y solo si las ecuaciones $y * a = b$ y $a * x = b$ tienen solución en G para todo $a, b \in G$.
2. Sea G un grupo. Prueba que el único elemento $g \in G$ que satisface $g^2 = g$ es el elemento neutro.
3. Demuestra que un grupo G de orden par existe un elemento $e \neq a$ tal que $a = a^{-1}$.

   Definición: El *centro* de un grupo G se define como el conjunto

   $$Z(G) = \{g \in G \mid ga = ag \text{ para todo } a \in G\}.$$

4. Demuestre que $Z(G)$ es un subgrupo abeliano de G. ¿Qué pasa si G es abelaino?

   Definición: Sea G un grupo y $a \in G$. El *centralizador de a en G* se define como el conjunto

   $$C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}.$$

5. Demuestre que $C_G(a)$ es un subgrupo de G para todo $a \in G$.
6. Sea G un grupo en el cual todo elemento es su propio inverso. Demuestre que G es abeliano.
7. Demuestre que si G es un grupo abeliano, entonces $(ab)^n = a^n b^n$ para todo $a, b \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$.
8. Si G es un grupo tal que $(ab)^2 = a^2 b^2$ para todo $a, b \in G$, entonces G es abeliano.
9. Demuestre que todo grupo cíclico es abeliano. Pruebe o de un contra-ejemplo para el recíproco.
10. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico de orden $n > 0$. Demuestre que $G = \left\langle a^k \right\rangle$ si y solo si $\operatorname{mcd}(k, n) = 1$.
11. Sea G un grupo no abeliano de orden 10. Demuestre que G contiene al menos un elemento de orden 5.

12. Sea G un grupo con $|G| = 2n$. Muestra que el número de elementos de orden 2 es impar, por lo que hay un elemento, además del neutro, que es su propio inverso.
13. Demuestre que $Gl_2(\mathbb{Q})$ (El conjunto de matrices investibles de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Q}$) es un grupo con la multiplicación de matrices. Además muestra que $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tienen orden finito, pero AB tiene orden infinito.
14. Sean $H, K \leq G$ dos subgrupo de un grupo G. Demuestre que $H \cup K$ es un subgrupo de G si y solo si $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$. De un ejemplo de dos subgrupos H y K de un grupo G tal que $H \cup K$ no sea un subgrupo.
15. Sea G un grupo tal que todo subgrupo propio de G es cíclio. ¿Se pude concluir que G es cícico? Demuestre o de un contraejemplo.
16. Demuestre que si los únicos subgrupos de G son $\{e\}$ y G, entonces G es un grupo finito de orden primo.
17. Demuestre el teorema de Wilson; si p es un número primo entonces $(p-1)! \equiv -1$.
18. Sea $H \leq G$. Demuestre que las clases laterales Ha y Hb son iguales si y solo si $ab^{-1} \in H$.
19. Sean H y K subgrupos de un grupo finito G. Demuestre que si $H \subseteq K \subseteq G$, entonces $[G : H] = [G : K][K : H]$.
20. Sea $H \leq G$ tal que si $Ha \neq Hb$ entonces $aH \neq bH$. Demuestre que $gHg^{-1} \subseteq H$ para todo $g \in G$.
21. Demuestre que si $H \leq G$ con $[G : H] = 2$ entonces $H \triangleleft G$.
22. Sea G un grupo y $Z(G)$ su centro. Demuestre que $Z(G) \triangleleft G$.
23. Sean $H \leq G$ y $N \triangleleft G$. Entonces $HN \leq G$. Si además $H \triangleleft G$ entonces $HN \triangleleft G$.
24. Sea G un grupo y K un subgrupo cíclico de G. Demuestre que todo subgrupo de K es normal en G.
25. Sea H un subgrupo de un grupo G tal que el producto de dos clases laterales derechas de H es nuevamente una clase lateral derecha de H en G. Demuestre que H es normal en G.
26. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G con $[G : H] = m$. Demuestre que $g^m \in H$ para todo $g \in G$. ¿Qué pasa si H no es normal? ¿Qué pasa si G no es G no es finito?
27. Sea G un grupo y $n > 0$. Demuestre que si H es el único subgrupo de G de orden n, entonces H es normal en G.

28. Sea G un grupo finito y $H \leq G$ tal que $[G : H]$ es el menor primo que divide a $|G|$. Demuestre que $H \triangleleft G$.